

**Sincronização em Redes Complexas:
Estabilidade e Persistência**

Marcos Daniel Nogueira Maia

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
À
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Tiago Pereira da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi

Santo André, março de 2013

Sincronização em Redes Complexas: Estabilidade e Persistência

Esta dissertação trata-se da versão original
do aluno Marcos Daniel Nogueira Maia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, por tornar os meus sonhos possíveis e sempre me dar força para alcançá-los.

Em especial, agradeço à minha esposa, Lidiana, por seu amor, apoio e compreensão. Por sempre entender que em vários momentos, tive que abdicar de sua companhia para me dedicar ao estudo e a consequente produção deste trabalho.

Agradeço aos meus orientadores, o Prof. Tiago Pereira e o Prof. Rafael Grisi, por sua dedicação em sempre estar disponível para me ajudar. Ao Prof. Tiago Pereira, em especial agradeço, por me receber como orientando, mesmo sem me conhecer, a princípio. Pela paciência e disposição que tiveram para me ensinar, desde o mais simples ao mais complexo. Pelo incentivo ao estudo disciplinado e à pesquisa, e pelos conselhos de vida, agradeço.

Aos professores da pós-graduação, por me fornecerem o suporte matemático tão precioso e necessário para a minha formação, agradeço.

Aos amigos da pós-mat, em especial ao José, Rafael A., Rafael B., Moisés, Renato, Sue Ellen, pelas horas de estudos e disposição em ajudar aos demais colegas, agradeço. Agradeço, também aos amigos do grupo de estudos em Sistemas Dinâmicos, Prof. Tiago Pereira, Élcio, Fernando e Jihard, pelos conhecimentos que compartilhamos.

Aos amigos e professores de graduação do UNASP-SP. Em particular, ao Prof. Ivanildo Prado, por sempre animar os seus estudantes na continuação dos estudos. Dentre os meus amigos da graduação, e que também são amigos pessoais, ao Décio, pelo seu companheirismo, por sempre me receber em sua casa quando eu precisei, agradeço.

À minha família, em especial aos meus pais, José e Maria, por seu apoio moral, pelo suporte financeiro e por entender que a distância de casa, muitas vezes é necessária para alcançarmos os nossos sonhos, agradeço.

E por fim, porém, não menos importante, agradeço à UFABC, pelo apoio financeiro durante todo o curso de mestrado e por possibilitar a oportunidade dessa conquista.

Resumo

Investigamos o surgimento do comportamento coletivo global em redes de osciladores idênticos difusivamente acoplados, que no modelo estabelecido é uma variedade invariante pelas equações do movimento. A interação é modelada através da teoria de grafos e de sistemas dinâmicos. Utilizamos a teoria de contrações uniformes em equações diferenciais lineares não-autônomas para estabelecer os critérios sobre o parâmetro global de acoplamento que por sua vez define o estado síncrono e sua respectiva estabilidade sob perturbações lineares e não-lineares. O parâmetro crítico global de interação é dado em função somente da dinâmica individual dos osciladores, de propriedades espectrais da função de acoplamento e do segundo autovalor do laplaciano da rede.

Palavras-chave: Sincronização, Redes, Estabilidade.

Abstract

We investigate emergence of the global collective behavior in networks of diffusively coupled identical oscillators, which in the established model is an invariant manifold of the motion equations. The interaction is modeled with the graph theory and dynamical systems theory. We use the uniform contractions theory in non-autonomous linear differential equations to address the criterion under the global coupling parameter, which it turns defines the synchronized motion and its stability under small linear and non-linear perturbations. The critical global interaction parameter is given only by the isolated dynamics, by the spectral properties of the coupling function and the second eigenvalue network laplacian.

Keywords: Synchronization, Complex networks, Stability.

Sumário

Lista de Símbolos	vi
Lista de Figuras	vii
1 Introdução	1
1.1 Principais Resultados	2
1.2 Organização do Trabalho	3
2 Conceitos Preliminares	4
2.1 Espaços Normados e Espaços com Produto Interno	4
2.2 Matrizes	5
2.2.1 Teoria da Representação	5
2.2.2 Norma Induzida de Matriz	6
2.2.3 Produto de Kronecker	7
2.3 Conjuntos	8
3 EDO's - Tópicos em Teoria Qualitativa	9
3.1 Sistemas Dissipativos	10
3.1.1 Segundo Método de Lyapunov	10
3.1.2 Sistema de Lorenz	12
4 Estabilidade em EDO's Lineares Não-Autônomas	16
4.1 Alguns Tipos de Estabilidade	16
4.2 Operador de Evolução	17
4.3 Persistências da Solução Trivial	19
4.4 Critérios para Contração Uniforme	21
5 Tópicos em Teoria dos Grafos	24
5.1 Matrizes de Adjascência e Laplaciana	25
5.2 Propriedades Espectrais do Laplaciano	25
5.3 Espectro de Alguns Grafos Regulares	27
5.4 Redes Complexas	29
5.4.1 Redes Aleatórias	30
5.4.2 Redes Pequeno Mundo	30
5.4.3 Redes <i>Scale-Free</i>	30

6	Redes de Osciladores com Acoplamento Difusivo	31
6.1	Parâmetro Global de Acoplamento	33
6.2	Principais Resultados	34
7	Ilustrações	38
7.1	Equação Variacional	38
7.2	Parâmetros Críticos de Acoplamento	39
7.2.1	Utilizando o Critério da Parte Simétrica	40
7.3	Perturbações em Dois Osciladores Acoplados	43
8	Prova dos Teoremas Fundamentais	47
8.1	Existência Global das Soluções	47
8.2	Sincronização Global em Redes	49
8.3	Perturbações na Função de Acoplamento	53
9	Conclusões	55
9.1	Considerações Finais	55
9.2	Sugestões para Pesquisas Futuras	55
A	Álgebra Linear	57
A.1	Menores Principais	57
A.2	Obtenção do Modelo de Perturbação em Blocos	58
B	Equações Diferenciais Ordinárias	59
B.1	Existência, Unicidade e Extensão	59
B.2	Desigualdade de Grönwall e Variação dos Parâmetros	60
B.3	Prova do Lema 5	60
	Referências Bibliográficas	61

Lista de Símbolos

\approx	Aproximadamente
$\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$	Conjunto das matrizes quadradas de dimensão n com entradas reais
\mathbb{R}_+	Conjunto $[0, +\infty)$
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\det(\cdot)$	Determinante
\setminus	Diferença entre conjuntos
\exists	Existe
$\exp(\cdot)$	Exponencial (o mesmo que número de Euler)
■	Fim da prova
\sim	$i \sim j$ (i é vizinho de j)
$\text{diag}(\cdot)$	Matriz diagonal
$Df(x)$	Matriz Jacobiana do campo de vetores f calculada em x
\max	Máximo
$\ \cdot\ $	Norma
e	Número de Euler ($e = 2,718281828\dots$)
\circ	Operação composição
$T(t, s)$	Operador de evolução
∇	Operador gradiente
α_c	Parâmetro crítico de acoplamento
α	Parâmetro global de acoplamento
$:=$	Por definição igual a
\otimes	Produto de Kronecker
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno
λ_2	Segundo autovalor do laplaciano do grafo
$\mathcal{O}(\cdot)$	Símbolo de Landau
\oplus	Soma direta
\sup	Supremo
\dagger	Transposto conjugado
$ \cdot $	Valor absoluto
$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$	Vetor em \mathbb{R}^n com todas as entradas iguais a $0 \in \mathbb{R}$

Lista de Figuras

3.1	Ilustração geométrica para o Teorema 8 com $m = 2$	12
3.2	O eixo horizontal representa o tempo e o vertical as componentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das trajetórias cuja diferença das condições iniciais, considerando a norma euclidiana, é aproximadamente 0,014.	13
3.3	Típica trajetória para o sistema de Lorenz considerando os parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$	14
7.1	Gráficos de $x_1(t) \times x_2(t)$ com $0 \leq t \leq 100$ onde $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são respectivamente as primeiras componentes das trajetórias de $\mathbf{x}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ e $\mathbf{x}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ no modelo de dois osciladores acoplados com dinâmica de Lorenz. Do lado esquerdo com parâmetro de acoplamento igual a 0.1 e do lado direito com 30.	41
7.2	Do lado esquerdo temos a norma euclidiana da diferença de estados das trajetórias dos osciladores em função do tempo para $\alpha = 0.1$ e do lado direito para $\alpha = 30$	43
7.3	Do lado esquerdo temos agora $\alpha = 0.6$. Verificamos que o decaimento é mais lento porém o sistema tende à sincronização. Do lado direito temos a relação entre a norma euclidiana da diferença dos estados contra o parâmetro global de acoplamento. Neste caso, estamos tomando a média temporal da norma euclidiana com $1000 \leq t \leq 2000$ para cada α . Notoriamente, para valores $\alpha > 0.5$ o sistema irá sincronizar.	43
7.4	Mapa de cores para o Exemplo 4. A escala de cores representa $\ \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\ _2$	44
7.5	Mapa de cores para o Exemplo 5 com $\omega = 4.1888$	45
7.6	Mapas de cores para diferentes valores de ω , relativo ao Exemplo 5.	46

Capítulo 1

Introdução

O termo sincronização, que do grego significa “ocorrência ao mesmo tempo”, está relacionado a uma gama de fenômenos presentes em muitos ramos das ciências naturais, engenharia e vida social [APK01],[Str03],[PBK07]. Este fenômeno está enraizado, por exemplo, na vida humana, ocorrendo desde processos metabólicos em nossas células às mais altas tarefas cognitivas [ADGK⁺08]. Um dos primeiros indivíduos a estudar esse tipo de fenômeno foi o físico alemão Christiaan Huygens (1629 - 1694). Ele descobriu que relógios de pêndulo, quando pendurados em um mesmo suporte, tendem à sincronização (movimento dos pêndulos). De forma geral, esse estado síncrono surge da competição e colaboração entre os elementos de uma rede. Exemplos vão desde a sincronização em relógios de pêndulos à doenças neurais como Mal de Parkinson [TRW⁺98] e Epilepsia, onde está última acontece quando um grupo específico de neurônios mantem um estado síncrono [MJ03].

Modelamos então essa interação entre elementos através de uma rede, em termos matemáticos, através da teoria dos grafos e da teoria de sistemas dinâmicos. Passamos a distinguir a estrutura da rede, a natureza de interação entre os elementos e o comportamento dinâmico individual dos osciladores (elementos da rede). Uma rede é dita complexa quando a mesma não possui uma estrutura regular de conectividade, e no mundo real a análise de sistemas interagentes é feita a partir da modelagem em redes com estrutura complexa. Existem vários tipos de redes que se enquadram nesta característica, como por exemplo as redes aleatórias, redes com estrutura de pequeno mundo, redes *scale-free*, entre outras [CLotMSU06].

Estaremos interessados em sincronização que ocorre de forma global. E global no que se refere a totalidade dos elementos da rede e ao tempo, ou seja, uma vez que o estado síncrono ocorre, o mesmo permanece por todo o tempo futuro. Um dos principais ingredientes para o surgimento da sincronização global na rede é que os sistemas interagentes sejam idênticos, ou seja, que todos eles sejam descritos exatamente pela mesma equação de movimento [RP03]. Estaremos interessados apenas em redes de sistemas idênticos.

Recentemente, Pecora e Carroll [PC98] estudando modelos de osciladores em redes complexas com interação semelhante à difusão, demonstraram que tais redes de sistemas dinâmicos não-lineares, porém idênticos, podem sincronizar globalmente, mesmo manifestando uma dinâmica individual complicada. Utilizamos um modelo de rede semelhante ao utilizado por Pecora e Carroll em [PC98].

Considere que um grafo G modela uma rede de n vértices. Sobre cada vértice da grafo introduzimos uma cópia da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde requeremos que $f \in C^r$, $r \geq 2$, de forma que, essencialmente, f representa uma dinâmica não-linear, possivelmente caótica, e que as condições de existência e unicidade sejam satisfeitas. Para o acoplamento entre os osciladores, consideramos o caso de interação difusiva, isto é, o acoplamento depende da diferença de uma função dos estados dos vértices que estão conectados. Então, dado um vértice i em G , a sua dinâmica passa a ser descrita na forma

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \alpha \sum_{j=1}^n A_{ij} [H(x_j) - H(x_i)], \quad (1.1)$$

onde os A_{ij} 's são as entradas da matriz de adjacência, que codifica a informação topológica da rede dizendo quais elementos possuem interação direta, α é o parâmetro global de acoplamento e $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função de acoplamento, que sem perder a generalidade podemos considerar que H , é uma matriz. Trabalharemos apenas com o caso em que H é uma matriz positiva-definida.

Note que um importante detalhe deste modelo é que quando $x_i = x_j$ para todo i, j , então o termo de acoplamento desaparece identicamente de forma que $x_i(t) = x_j(t)$ ficam iguais por todo o tempo, caracterizando assim um subespaço invariante. Passamos então a chamar o estado síncrono de variedade de sincronização. A variedade de sincronização é uma variedade invariante pelas equações do movimento e a análise da sincronização global mostra que tal movimento síncrono e sua consequente estabilidade é definida pela intensidade do acoplamento α . Objetivamos então caracterizar a estabilidade desse subespaço, que possui uma geometria trivial.

Nos últimos 20 anos houve uma evolução significativa no campo da sincronização em redes. A análise da sincronização beneficia-se da análise estrutural de tais redes [BS09], isto é, a estrutura de interação entre os elementos influencia significativamente na sincronização [PC98],[Wu07]. Por exemplo, sabe-se que redes com estrutura de pequeno mundo, ou seja, redes bem conectadas, possuem uma maior propensão à sincronização do que as redes regulares que as geram, e consequente menos propensas à sincronização do que as redes complexas aleatórias advindas da construção da rede pequeno mundo [WS98]. Por outro lado, a heterogeneidade na rede, isto é, redes em que a maioria dos elementos possuem poucos vizinhos e apenas alguns elementos com muitos vizinhos, dificulta a sincronização global da rede [MZK05], no entanto facilita a sincronização entre elementos que possuem uma grande quantidade de vizinhos [Per10].

O modelo (1.1) tem sido muito usado como ponto de partida para se entender a emergência da coletividade. Nijmeijer e Pogromsky em [Nij01] estudaram o modelo do ponto de vista de controle e eles provam que as soluções existem globalmente. Hasler e colaboradores em [BBH04] estudam o problema construindo funções de Lyapunov para provar a estabilidade da variedade de sincronização. Macau e colaboradores em [GMY12] também estudam esse problema utilizando a existência funções de Lyapunov para garantir a estabilidade do comportamento síncrono. Josic em [Jos00] estudou esse problema do ponto de vista das variedades invariantes. Pereira em [Per12] estudou este problema do ponto de vista de dicotomias e nossa abordagem é baseada na mesma perspectiva.

1.1 Principais Resultados

Os estudos aqui desenvolvidos provém uma compreensão rigorosa do comportamento coletivo em redes e assim abre frentes para novos resultados na área.

Uma abordagem muito utilizada para se estudar a estabilidade da variedade de sincronização em redes é baseada na teoria dos expoentes de Lyapunov [PC98], [HCLP09], [Per10]. No entanto, sabe-se que neste contexto, perturbações arbitrariamente pequenas podem causar mudanças abruptas na estabilidade do movimento síncrono [BP02]. Abordamos então o fenômeno da sincronização através de uma nova perspectiva, isto é, através da teoria de contrações uniformes em equações diferenciais lineares não-autônomas, de forma que poderemos garantir que a variedade de sincronização seja resistente à pequenas perturbações. Destacamos as principais contribuições abordadas neste trabalho:

1. Existência global das soluções de (1.1): Construimos uma função de Lyapunov para a dinâmica isolada e extendemos para a dinâmica coletiva. Dessa forma, independentemente da rede considerada, as soluções de (1.1) são limitas e portanto existem globalmente. Veja o Teorema 16.

2. Estabilidade da variedade de sincronização: A partir da teoria de contrações uniformes em equações diferenciais lineares não-autônomas poderemos determinar um parâmetro crítico de acoplamento α_c tal que para $\alpha > \alpha_c$ em (1.1) a variedade de sincronização é estável. Precisamente, temos o Teorema 17.

3. Persistência da sincronização: Introduzimos um modelo de perturbação que age na função

de acoplamento de (1.1) e utilizamos um resultado de persistência de [Cop78] para estabelecer a magnitude das perturbações que não destrói a estabilidade da variedade de sincronização. Veja o Teorema 18.

Agora, gostaríamos de expor algumas considerações sobre os itens acima. No item 1 contruímos uma função de Lyapunov para a coletividade supondo que existe uma função de Lyapunov quadrática para a dinâmica isolada. O item 2 é um resultado fundamental e vários autores já o provaram [Jos00], [Nij01], [Per12]. A novidade então, é que abordamos na prova a teoria de contrações uniformes em equações diferenciais lineares não-autônomas [Cop78]. Essa teoria não é usualmente empregada para estudar redes, porém foi recentemente usada para provar o item 2 em [Per12]. O que fazemos aqui é expandir e abordar com mais detalhes a prova. Portanto, não há nenhuma técnica nova mas no contexto de sincronização o resultado é novo.

O item 3 é o ponto novo e segue praticamente como um corolário do resultado apresentado no item 2. O caso onde f em (1.1) não é igual foi tratado por Pereira e colaboradores em [PEB⁺13], porém o caso em que H não é igual é novo na literatura. No caso da perturbação na função de acoplamento, a estrutura da rede tem um papel muito importante para a conservação da estabilidade.

1.2 Organização do Trabalho

Queremos deixar claro ao leitor que, do Capítulo 2 ao Capítulo 5 temos por objetivo fundamentar toda a teoria matemática que será utilizada para modelar o nosso problema, a saber, o problema de estudar a o surgimento da sincronização e sua estabilidade em redes. Portanto, o leitor deve saber que esse é um tema interdisciplinar e que por essa característica, faz-se necessário fundamentar e então interligar algumas diferentes áreas da matemática, para então dar o devido tratamento rigoroso sobre o mesmo. Isso faz com que, a princípio, pareça que estamos tratando de temas que estão a parte do título apresentado pela dissertação, porém os mesmos são de fundamental importância para o tratamento do problema proposto.

No Capítulo 2, apresentamos os conceitos preliminares, e as notações matemáticas que utilizaremos durante o desenvolvimento do trabalho. No Capítulo 3 abordaremos alguns tópicos da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias, à qual é usada para modelar e entender o comportamento individual dos elementos da rede. Abordaremos em especial a construção da função de Lyapunov. Em seguida, no Capítulo 4 trabalharemos sobre a estabilidade e suas persistências, da solução trivial em equações diferenciais lineares não-autônomas. No Capítulo 5 abordaremos os fundamentos da teoria espectral dos grafos, que por sua vez é utilizada para modelar topologicamente uma rede qualquer. Seguido pelo Capítulo 6 o qual introduziremos formalmente o modelo de acoplamento difusivo em redes, e enunciamos os principais resultados da presente dissertação. No Capítulo 7 trabalharemos vários exemplos para a teoria abordada, principalmente com o exemplo mais trivial de rede, a saber, o de dois osciladores difusivamente acoplados, do qual extrairemos valiosos resultados. E finalmente, no Capítulo 8 apresentaremos as provas dos principais resultados enunciados no Capítulo 6. Por fim, no Capítulo 9 discutiremos algumas conclusões e abordaremos ideias sobre uma possível continuação do respectivo trabalho. Nos Apêndices A e B, trataremos de resultados gerais e específicos sobre respectivamente Álgebra Linear e Equações Diferenciais Ordinárias, os quais são utilizados ao longo da dissertação.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

O presente capítulo é utilizado, principalmente, para introduzir a notação que servirá como base para todo o texto. Estão disponíveis nos Apêndices A e B outras informações basilares para o entendimento da problemática exposta. Trabalharemos essencialmente com espaços que possuem norma e produto interno e matrizes quadradas.

2.1 Espaços Normados e Espaços com Produto Interno

Considere \mathbb{R} o corpo dos números reais. Indicamos por \mathbb{R}_+ o conjunto $[0, +\infty)$. Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Uma **norma** em E é a função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) Para todo $x \in E \setminus \{\mathbf{0}\}$ tem-se que $\|x\| > 0$.
- (ii) $\|x\| = 0$ se e somente se $x = \mathbf{0}$ (vetor nulo).
- (iii) Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in E$, tem-se que $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, onde $|\alpha|$ é o valor absoluto de α .
- (iv) (Desigualdade Triangular) Para todo $x, y \in E$ vale que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, importantes normas que surgem são

1. (p -norma) $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$; Quando $p = 2$ temos a norma Euclidiana.
2. (Norma do máximo) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$;
3. Norma da soma ($p = 1$).

Dadas duas normas $\|\cdot\|_u$ e $\|\cdot\|_v$ em E . Dizemos que tais normas são equivalentes se existem números positivos c_1 e c_2 tais que

$$c_1\|x\|_u \leq \|x\|_v \leq c_2\|x\|_u,$$

para todo $x \in E$.

Devido a forte garantia do teorema a seguir, por todo o presente texto, não fazemos uso de uma norma específica na maioria das situações em que trabalhamos com tal conceito.

Teorema 1. *Duas normas quaisquer em \mathbb{R}^n são equivalentes.*

Prova: Ver [Lim10], p. 19.

De forma mais geral, em espaços de dimensão finita, todas as normas são equivalentes [O'S06].

Uma norma em um espaço vetorial E dá origem à noção de distância em E . Para todo $x, y \in E$, a distância de x a y é definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Dessa forma, como em um espaço vetorial normado tem-se a noção de distância, ou métrica, o mesmo pode ser chamado de **espaço métrico**. Um espaço métrico E é dito ser **completo** se toda sequência de Cauchy em E é convergente em E [O'S06].

Definição 1. *Seja E um espaço métrico completo e $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ uma função contínua. Dizemos que f é **uniformemente limitada** em t , $t \in U$, se existe alguma constante c tal que*

$$\sup_{t \in U} \|f(t)\| = c.$$

Seja E um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} . O **produto interno** é a função real $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada par de vetores $u, v \in E$ ao número $\langle u, v \rangle$, de modo que, são válidas as propriedades de simetria, bilinearidade e positividade [Lim10].

2.2 Matrizes

Indicamos por $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ o conjunto das matrizes quadradas de dimensão $n \times n$ com entradas em \mathbb{R} .

Definição 2. *Dizemos que uma matriz $H \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é **simétrica** se $H = H^\dagger$, onde \dagger representa o transposto.*

A matriz identidade, indicada por $I_n \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$, é uma matriz simétrica. Qualquer matriz $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ pode ser decomposta na forma

$$A = \frac{A + A^\dagger}{2} + \frac{A - A^\dagger}{2},$$

onde a parcela $(A + A^\dagger)/2$ é chamada de parte simétrica de A .

Reservamos a notação “diag” para representar as matrizes diagonais em $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$. Ou seja, as matrizes cujos os valores fora da diagonal são nulos. Por exemplo, $I_3 = \text{diag}(1, 1, 1)$.

Definição 3. *Seja $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dizemos que uma matriz $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$, simétrica, é **positiva-definida** [positiva semi-definida] se $\langle x, Ax \rangle > 0$ [$\langle x, Ax \rangle \geq 0$] e **negativa-definida** [negativa semi-definida] se $\langle x, Ax \rangle < 0$ [$\langle x, Ax \rangle \leq 0$].*

Note que $\langle x, Ax \rangle = x^\dagger Ax$, de forma que em muitos contextos poderemos usar essa equivalência.

2.2.1 Teoria da Representação

Definição 4. *Diremos que uma matriz $Q \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é **ortogonal** se $Q^\dagger = Q^{-1}$, onde Q^{-1} é a inversa de Q .*

Definição 5. *Uma matriz real A é **ortogonalmente diagonalizável** se existe uma matriz ortogonal Q tal que $Q^\dagger A Q = D$ é uma matriz diagonal.*

Teorema 2 (Teorema Espectral). *Uma matriz $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é ortogonalmente diagonalizável se e somente se é simétrica.*

Prova: Ver [Lim09], página 167.

Corolário 1. *Seja A uma matriz real e simétrica. Então existe uma matriz ortogonal Q tal que*

1. $D = Q^\dagger A Q$ é uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal são os autovalores de A e
2. As colunas de Q são formadas pelos autovetores de A .

Proposição 1. *Seja $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ uma matriz simétrica. Então para todo λ , autovalor de A , tem-se que A é **positiva-definida** [positiva semi-definida] se e somente se $\lambda > 0$ [$\lambda \geq 0$] e **negativa-definida** [negativa semi-definida] se e somente se $\lambda < 0$ [$\lambda \leq 0$].*

Como A é simétrica então podemos formar uma base de \mathbb{R}^n com os autovetores de A os quais podem ser tomados ortonormalizados. Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ tal base, então $x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, $x \in \mathbb{R}^n$, o que produz

$$\begin{aligned} \langle x, Ax \rangle &= \left\langle \sum_i c_i v_i, A \sum_i c_i v_i \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_i c_i v_i, \sum_i c_i \lambda_i v_i \right\rangle = \sum_i c_i^2 \lambda_i. \end{aligned}$$

Sendo $\lambda_i > 0$ para todo i tem-se que $\langle x, Ax \rangle > 0$. Os demais resultados seguem alterando-se as hipóteses sobre o sinal de cada λ_i .

2.2.2 Norma Induzida de Matriz

Se $\|\cdot\|$ é uma norma em \mathbb{R}^n e $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$, definimos a norma de A por

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Essa norma é conhecida como norma induzida [LT85]. Por toda a dissertação, fazemos uso dessa norma ao se trabalhar com matrizes. Uma notação mais precisa seria $\|A\|_p$, onde o índice p indica qual a norma sobre \mathbb{R}^n estamos induzindo a norma em $\text{Mat}(\mathbb{R}, n)$. Omitiremos tal índice, indicando-o apenas quando for necessário.

Observação: a noção de função uniformemente limitada dada pela Definição 1 pode também ser estendida às matrizes considerando a norma induzida.

Uma das propriedades mais importantes dessa norma é a propriedade sub-multiplicativa. Mais especificamente temos o

Lema 1. *Dados $A, B \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ temos*

1. $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (propriedade sub-multiplicativa).

Prova: Ver [DL07], p. 351.

Exemplo 1. *Sejam $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$, $A = [A_{ij}]$, e $x \in \mathbb{R}^n$. Considere a norma do máximo definida em \mathbb{R}^n por $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$, onde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Então*

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \\ &= \max_i \left| \sum_j A_{ij} x_j \right| \\ &\leq \max_i \sum_j |A_{ij}| |x_j| \leq \|x\|_\infty \max_i \sum_j |A_{ij}| = \max_i \sum_j |A_{ij}|. \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos mostrar também que $\|A\|_\infty \geq \max_i \sum_j |A_{ij}|$. Certamente, para algum $1 \leq k \leq n$ tem-se $\max_i \sum_j |A_{ij}| = \sum_j |A_{kj}|$. Então, existe $x_0 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ com $\|x_0\|_\infty = 1$ escrito da forma

$$\alpha_j = \begin{cases} \frac{|A_{kj}|}{A_{kj}} & \text{se } A_{kj} \neq 0 \\ 0 & \text{se } A_{kj} = 0 \end{cases}$$

que cumpre

$$\begin{aligned}\|Ax_0\|_\infty &= \max_i \left| \sum_j A_{ij} \alpha_j \right| \\ &= \max_i \left| \sum_j A_{ij} \frac{|A_{kj}|}{A_{kj}} \right| = \sum_j |A_{kj}| \geq \max_i \sum_j |A_{ij}|.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |A_{ij}|,$$

que simplesmente é a soma máxima dos valores absolutos das linhas de A .

2.2.3 Produto de Kronecker

Sejam $A = [A_{ij}] \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ e $B = [B_{ij}] \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m)$, então o produto de Kronecker de A e B , escrito como $A \otimes B \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n \times m)$, é a matriz formada pelas submatrizes $A_{ij}B$ escrita da forma

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}B & A_{n2}B & \cdots & A_{nn}B \end{bmatrix}.$$

Teorema 3. Sejam $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$, $B \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m)$, $U \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ e $V \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m)$. Então

$$(A \otimes B)(U \otimes V) = AU \otimes BV.$$

Prova: Ver [LT85], p. 408.

Teorema 4. Sejam $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ e $B \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m)$, então

$$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger.$$

Prova: Por definição tem-se $(A \otimes B)^\dagger = (A_{ij}[B])^\dagger = A_{ji}[B^\dagger] = A^\dagger \otimes B^\dagger$. ■

Teorema 5. Sejam $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ e $B \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m)$.

1. Se A e B são positiva-definidas então $A \otimes B$ é positiva-definida.
2. Se A é positiva-definida e B é positiva semi-definida então $A \otimes B$ é positiva semi-definida.
3. Se A é positiva semi-definida e B é positiva definida então $A \otimes B$ é positiva semi-definida.

Prova: Considere o item 1. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ não-nulos. Então por hipótese tem-se que $x^\dagger Ax > 0$ e $y^\dagger By > 0$. Assim $x^\dagger Ax \otimes y^\dagger By = (x \otimes y)^\dagger (A \otimes B)(x \otimes y) > 0$ (Teoremas 3 e 4). Os demais itens seguem de forma análoga. ■

Teorema 6. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $\|\cdot\|_p$ uma p -norma. Então

$$\|x \otimes y\|_p = \|x\|_p \|y\|_p.$$

Prova: $\|x \otimes y\|_p^p = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m |x_k y_l|^p = \sum_{k=1}^n |x_k|^p \sum_{l=1}^m |y_l|^p = \|x\|_p^p \|y\|_p^p$. ■

O resultado é estensível para matrizes considerando a norma induzida.

2.3 Conjuntos

A *bola aberta* de centro em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $\delta > 0$ é o conjunto $B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < \delta\}$. Analogamente, a *bola fechada* de centro x_0 e raio $\delta > 0$ é o conjunto $\overline{B}_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq \delta\}$.

Definição 6. Dizemos que um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é **limitado** quando o mesmo está inteiramente contido em alguma bola fechada.

Dado um ponto $a \in E$, dizemos que a é *ponto interior* a E quando, para algum $\delta > 0$, tem-se que $B_\delta(a) \subset E$.

Definição 7. Um conjunto E é **aberto** quando todo ponto de E é ponto interior a E .

Definição 8. Em relação a \mathbb{R}^n , dizemos que um conjunto E é **fechado** se e somente se o seu complementar, $\mathbb{R}^n \setminus E$ é aberto.

Definição 9. Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ chama-se **compacto** quando o mesmo é limitado e fechado.

Teorema 7 (Weierstrass). Seja E um conjunto compacto de \mathbb{R}^n . Então, toda função contínua $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ assume um valor máximo e um valor mínimo. Ou seja, existem $x_0, x_1 \in E$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in E$.

Prova: Ver [Lim10], p. 45. O Teorema de Weierstrass também é válido para espaços compactos quaisquer [Mun00].

Capítulo 3

EDO's - Tópicos em Teoria Qualitativa

Para estudar sincronização e sua consequente estabilidade, é necessário impor que os elementos da rede estudada possuam dinâmica. Em particular, essa dinâmica pode ser uma dinâmica não-linear (o modelo de rede que iremos estudar será formalmente apresentado no Capítulo 6).

Encontrar as soluções de uma equação diferencial não-linear pode não ser uma tarefa fácil. Na maioria dos casos (principalmente com sistemas em altas dimensões) pode não ser possível de se computar analiticamente as soluções [BN69]. Na verdade, existem apenas alguns poucos casos em que somos capazes de encontrar analiticamente a solução [soluções] de uma equação diferencial [sistema de equações diferenciais], como por exemplo em equações diferenciais lineares cujos coeficientes são constantes. Portanto, neste capítulo trabalharemos alguns pontos da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias (EDO's).

Seja D um aberto de \mathbb{R}^m , $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, um campo vetorial de classe C^r , $r \geq 2$, e considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x). \quad (3.1)$$

Para um dado $x(s) \in D$, o problema de valor inicial é encontrar um intervalo $I \ni s$, da reta real, onde s é ponto interior e $x(t)$ está definida em I satisfazendo a equação (3.1) e respeitando a condição inicial $x(s) = x_s$. Como f é de classe C^r , $r \geq 2$, garante-se o teorema de existência e unicidade das soluções (Teorema 21). Na maioria dos casos, vamos considerar $I \subset \mathbb{R}_+$ e $s = 0$.

Por vezes, nos referimos à equação diferencial (3.1) pela palavra sistema e f pela palavra dinâmica. Muitos nomes são dados à solução de uma equação diferencial, fazemos a escolha de usar a palavra trajetória ou simplesmente solução.

Definição 10. *Seja $\phi : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$ a aplicação $\phi(t, x_0) = x(t)$. Dizemos que ϕ é o **fluxo** do campo de vetores f onde $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a trajetória de f por x_0 em cada ponto $t \in I$.*

Podemos utilizar também a notação $\phi_t(x_0)$ para o fluxo. De forma mais simplificada, o fluxo é uma aplicação que mapeia a condição inicial na solução. Escrevendo $\phi_t(x(s)) = \phi_{t,s}(x)$ e considerando a operação composição, nota-se que o fluxo é um grupo de difeomorfismos a um parâmetro [Arn92], onde são válidas as propriedades

1. $\phi_{t,s} \circ \phi_{s,u}(x) = \phi_{t,u}(x)$ para todo $s, u, t \in I$ e $x \in D$.
2. $\phi_{t,t}(x) = x$ para todo $t \in I$ e $x \in D$.

Exemplo 2. *Dado o sistema linear $\dot{x} = Ax$, onde $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m)$, temos que para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^m$ dado,*

$$x(t) = \exp(tA)x_0$$

é a solução de $\dot{x} = Ax$ com a condição inicial $x(0) = x_0$, de modo que o fluxo $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dado por

$$\phi(t, x_0) = \phi_t(x_0) = \exp(tA)x_0.$$

Para $t = 0$ o fluxo resume-se ao operador identidade e para cada t , $\phi_t = \exp(tA)$ é um isomorfismo linear cujo inverso é o fluxo $\phi_t = \exp(-tA)$.

3.1 Sistemas Dissipativos

Definição 11. Dizemos que um conjunto $\Omega \subset D$ é **invariante** pelo fluxo ϕ do campo de vetores f se $\phi_t(\Omega) \subseteq \Omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Equivalentemente, dizemos que Ω é **positivamente invariante** se $\phi_t(\Omega) \subseteq \Omega$ para todo $t \geq 0$. E negativamente invariante quando $\phi_t(\Omega) \subseteq \Omega$ para $t \leq 0$. Em outras palavras se $x(s) \in \Omega$ então $x(t) \in \Omega$ para todo $t \geq s > 0$, no caso de Ω ser positivamente invariante. De forma mais intuitiva, dizemos que o conjunto Ω é positivamente invariante se as trajetórias entrarem em Ω lá permanecendo por todo o tempo futuro. Assim, temos a

Definição 12. Dizemos que o sistema (3.1) é **dissipativo** se suas soluções entram, a tempo finito, em um conjunto positivamente invariante $\Omega \subset D$.

Ω será chamado de **domínio absorvente** do sistema $\dot{x} = f(x)$. A existência de um domínio absorvente garante que as soluções do mesmo são limitadas e portanto existam globalmente em decorrência do teorema de extensão (Teorema 22). A seção a seguir tratará de condições para garantir a existência do domínio absorvente.

3.1.1 Segundo Método de Lyapunov

Esta seção é de valorosa importância pois a técnica que traz a ideia da função de Lyapunov será usada principalmente para garantir a existência global das soluções e encontrar regiões de estabilidade assintótica.

Descoberta por Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857 - 1918) no final do século 19, a técnica é conhecida por segundo método de Lyapunov ou método direto [BN69], pois a mesma pode ser aplicada diretamente às equações diferenciais sem ter nenhum conhecimento das soluções. A função de Lyapunov é bastante utilizada para estudar a estabilidade de pontos fixos. Porém, esse não será o nosso propósito no uso desta ferramenta. A estabilidade de pontos fixos, será estudada no Capítulo 4. A dificuldade desta técnica é que não existe uma fórmula fechada para encontrar tal função para o sistema de equações estudado.

Seja Ω um subconjunto conexo não-vazio de \mathbb{R}^m . Seja $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar continuamente diferenciável. Definimos as noções de definitude¹ de V :

Definição 13. Dizemos que a função escalar $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é **positiva-definida** com relação ao conjunto $\omega \subset \mathbb{R}^m$, contendo a origem, se $V(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m \setminus \omega$ e $V(0) = 0$.

Definição 14. Dizemos que $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é **negativa-definida** em relação ao conjunto $B \in \mathbb{R}^m$ se $-V$ é positiva-definida com respeito à esse conjunto.

A derivada de V com respeito ao sistema (3.1) é o produto interno

$$V'(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle, \quad (3.2)$$

onde $\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_m}(x) \right)$. De fato, visto que, se $x(t)$ é solução da equação (3.1), então pela regra da cadeia tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \left\langle \nabla V(x), \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle \\ &= \langle \nabla V(x), f(x) \rangle. \end{aligned}$$

Definição 15. Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo vetorial no aberto $D \subseteq \mathbb{R}^m$ e $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que a função V é uma **função de Lyapunov** para f com respeito ao conjunto $\Omega \subset D$ se

¹Classe dos conceitos de função positiva-definida e negativa-definida

- (i) V é positiva-definida em relação ao conjunto Ω e
- (ii) V' é negativa-definida em relação ao mesmo conjunto Ω .

Definição 16. Dizemos que V é radialmente ilimitada se

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty.$$

Definição 17. Dizemos que a função escalar contínua $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é própria se dado um conjunto compacto $K \in \mathbb{R}$ então a pré-imagem $V^{-1}(K)$ é compacto de \mathbb{R}^m .

Lema 2. Uma função contínua $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é própria se e somente se é radialmente ilimitada.

Prova: Ver [Ter09], p. 180.

Corolário 2. Se V é radialmente ilimitada então os conjuntos de nível $V(x) = c$ são compactos.

Teorema 8 (Lyapunov). *Seja V uma função de Lyapunov para f em (3.1) com respeito ao conjunto $\Omega \subset D$ contendo a origem, e além disso suponha que V é radialmente ilimitada. Sendo assim, as trajetórias da equação (3.1) entram, a tempo finito, em Ω , e lá permanecem por todo o tempo futuro.*

Dizer que as trajetórias entram a tempo finito no conjunto absorvente Ω significa dizer que o sistema (3.1) é dissipativo. Certamente o Teorema 8 depende da existência da função escalar V com as propriedades citadas. Porém tal resultado não nos mostra como construir a referida função, e esta é a principal limitação deste método. Então, não existe um procedimento específico para a construção de V , mas em boa parte dos casos, uma forma quadrática é uma boa candidata. Iremos então considerar apenas as formas quadráticas para a função de Lyapunov e assumir que a mesma é dada considerando a

Suposição 1. *Existe uma matriz positiva-definida Q tal que*

$$V(x) = 1/2 \langle x - a, Q(x - a) \rangle \quad (3.3)$$

onde $a \in \mathbb{R}^m$ é fixo, V é positiva-definida em relação ao conjunto

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^m : V(x) \leq \rho\}, \quad (3.4)$$

para algum $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $V'(x)$ é negativa-definida em relação à Ω .

O papel de $a \in \mathbb{R}^m$ é realizar uma translação de eixos, se necessária. A existência de um domínio absorvente para o sistema (3.1), garante que as soluções são limitadas e existem globalmente, pois como construído, o domínio absorvente Ω é um conjunto compacto de forma que o resultado segue pelo Teorema de Extensão (22). Vamos abordar apenas heurísticamente a prova do Teorema 8. Uma prova formal poderá ser encontrada em [BN69]. Vamos olhar para esse teorema geometricamente (veja a Figura 3.1 para o caso $m = 2$). De forma específica, vamos discutir a condição $V'(x) < 0$, onde V é positiva-definida com respeito a uma região Ω de \mathbb{R}^m .

Seja c uma constante positiva e considere a equação $V(x) = c$. Essa equação define superfícies de nível em \mathbb{R}^m , as quais indicamos da forma

$$S_c = \{x \in \mathbb{R}^m : V(x) \leq c\}.$$

Como V é radialmente ilimitada, tais conjuntos são compactos e portanto positivamente invariantes. Considere que a trajetória $x(t)$, solução de (3.1), está fora de Ω e que $S_c \supset \Omega$. Por definição, $V'(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$ onde o vetor $\nabla V(x)$ é um vetor normal a superfície de nível $V(x) = c$. Então, a hipótese de que $V'(x) < 0$ significa que $f(x)$ deve apontar para o interior da superfície de nível S_c . Por outro lado, o vetor $f(x)$ é um vetor tangente a trajetória do sistema $\dot{x} = f(x)$ em cada ponto $x(t)$. Portanto, a trajetória cruza do exterior para o interior da região limitada pela superfície

de nível $V(x) = c$ para todo c . Isso faz com que quando c tenda ao bordo de Ω as trajetórias entrem em Ω . Uma vez em Ω , as trajetórias não deixam Ω . Suponha que $x(t) \in \partial\Omega$ para algum $t = s > 0$ e que $x(p) \notin \Omega$ para p ligeiramente maior que s . Esta hipótese contradiz o fato de que $V(x(t))$ é decrescente ao longo da trajetória ².

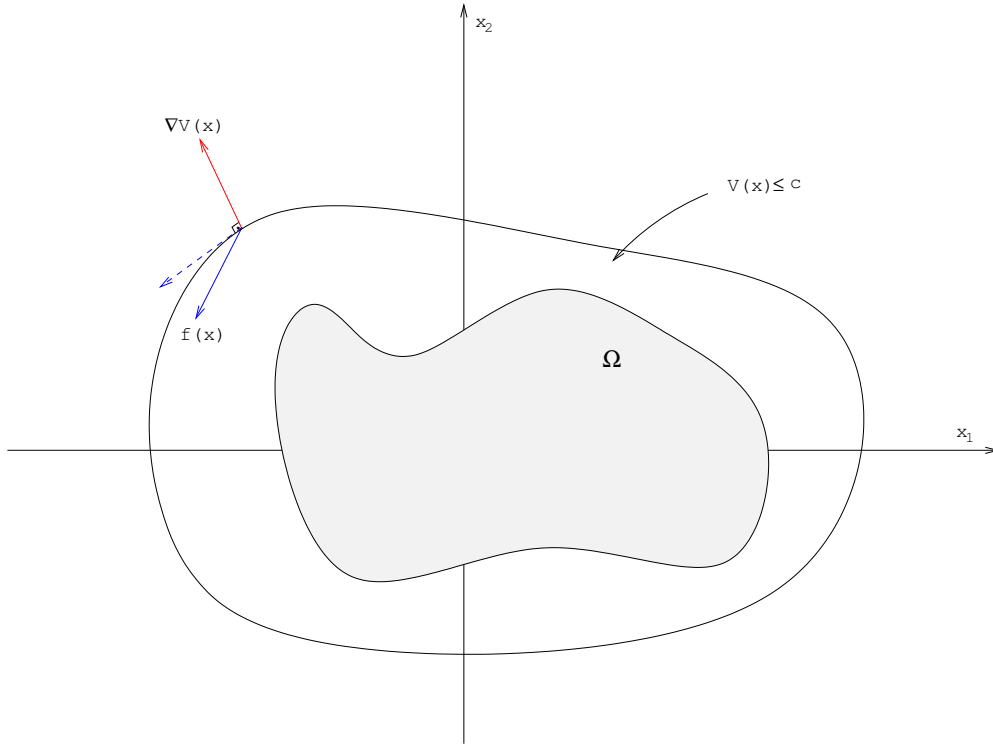


Figura 3.1: Ilustração geométrica para o Teorema 8 com $m = 2$.

3.1.2 Sistema de Lorenz

Um exemplo de dinâmica não-linear é a conhecida dinâmica de Lorenz. Utilizaremos tal dinâmica para efetuar as simulações computacionais dos principais resultados que serão apresentados ao longo da presente dissertação.

Edward Lorenz (1917 - 2008) foi um meteorologista do MIT interessado em previsões do clima à tempos longos. Com o advento do computador, muitas pessoas direcionavam suas tentativas de previsão do clima a partir da análise numérica de equações que governam a dinâmica da atmosfera. Algo que era muito usado eram as aproximações estatísticas, especialmente a regressão linear. Lorenz, porém, acreditava que tais métodos eram essencialmente falhos, pois as reais equações de evolução estavam longe de serem lineares. Depois de experimentar vários exemplos para testar suas ideias, Lorenz ao estudar um trabalho por B. Saltzman [Sal62], concernente a convecção de fluidos térmicos, percebeu que o sistema de equações estudado por Saltzman era o ideal para provar o seu ponto de vista [Via00]. A maioria dos modelos de previsão para o clima envolve equações diferenciais parciais, porém Lorenz encontrou um modelo muito mais simples de ser analisado [HSD04].

O sistema de Lorenz, $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, é tal que

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sigma(y - x) \\ x(r - z) - y \\ -bz + xy \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

com $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; σ , r e b constantes positivas, conhecidas respectivamente por número de

²Note que $\int_s^t V'(x(u))du = V(x(t)) - V(x(s)) < 0$ para todo $t > s$, portanto $V(x(t))$ é decrescente ao longo da trajetória $x(t)$.

Prandtl, número de Rayleigh, e uma proporção física, e seus valores clássicos são: $\sigma = 10$, $r = 28$, e $b = 8/3$. Esses são os valores que iremos considerar sempre que trabalharmos com o sistema de Lorenz.

Lorenz, ao utilizar condições iniciais distintas, porém muito próximas, para este sistema, verificou que as trajetórias divergiam gradativamente, de forma a produzir resultados bem diferentes, ou seja, ele percebeu que tal sistema apresenta uma dependência sensível das condições iniciais, e essa é a essência do comportamento caótico. Dessa forma, assumindo que o clima tem um comportamento parecido com este modelo, Lorenz concluiu ser impossível fazer previsões à longo prazo. Resumidamente, o sistema de Lorenz exibe uma dinâmica caótica [Via00].

Propriedades do Sistema de Lorenz

A não-linearidade do sistema de Lorenz está associada aos termos xy e xz . Como o sistema de Lorenz é um sistema caótico, as trajetórias, para pequenas diferenças nas condições iniciais, certamente irão divergir ao longo do tempo. Considere duas equações diferenciais, ambas com o sistema de Lorenz, a saber, $\dot{\mathbf{x}}_1 = f(\mathbf{x}_1)$ e $\dot{\mathbf{x}}_2 = f(\mathbf{x}_2)$, onde $\mathbf{x}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ e $\mathbf{x}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ com condições iniciais próximas, porém distintas. A partir de integrações numéricas, utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem, podemos verificar o fenômeno que aqui expomos. Utilizando as seguintes condições iniciais para o sistema: $(-7, 10, 5)$ e $(-7.01, 10.01, 5)$, exibimos as séries temporais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ que representam as primeiras componentes das trajetórias para o sistema considerado com as respectivas condições iniciais indicadas. O resultado é apresentado na Figura 3.2.

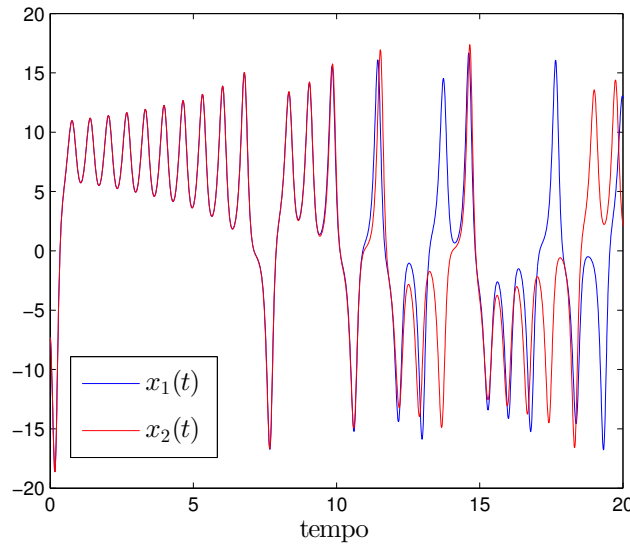


Figura 3.2: O eixo horizontal representa o tempo e o vertical as componentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das trajetórias cuja diferença das condições iniciais, considerando a norma euclidiana, é aproximadamente 0,014.

Temos o mesmo sistema com diferença nas condições iniciais bem próximas, entretanto, essa diferença cresce com o tempo porém a mesma é limitada. Mesmo considerando condições iniciais bem distintas, por exemplo, $(0, 2, 0)$ e $(0, -2, 0)$, ambas as trajetórias divergem e se assemelham à borboletas confinadas em uma mesma região do \mathbb{R}^3 (veja Figura 3.3). Isto nos elucida um importante fato sobre o sistema de Lorenz: todas as soluções, que não são pontos de equilíbrio, tendem ao mesmo conjunto. Tal conjunto é chamado de atrator estranho de Lorenz [Via00].

Função de Lyapunov Para o Sistema de Lorenz

Vamos discutir, nesta subseção, sobre a construção da função de Lyapunov para a dinâmica de Lorenz, e por consequência conseguimos também o domínio absorvente para a mesma.

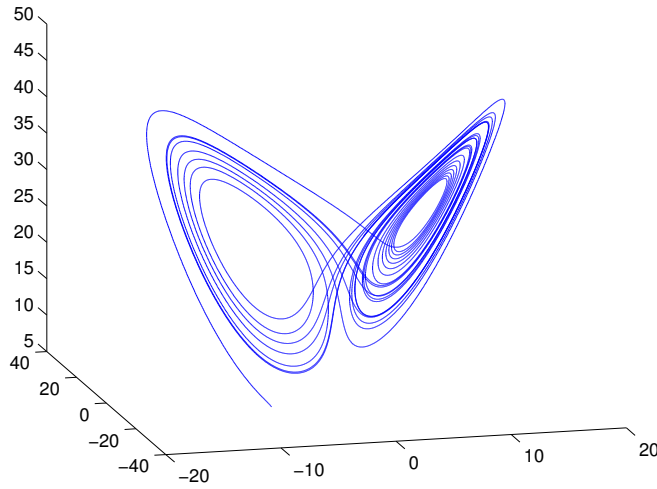


Figura 3.3: Típica trajetória para o sistema de Lorenz considerando os parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$.

Considere a função

$$V(\mathbf{x}) = 1/2 \langle \mathbf{x} - a, Q(\mathbf{x} - a) \rangle$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $a = (0, 0, 2r)$ e $Q = \text{diag}(r, \sigma, \sigma)$, a qual deve ser positiva-definida com relação a algum $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. De forma explícita a função V se lê

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= 1/2 \langle (x, y, z - 2r), Q(x, y, z - 2r) \rangle \\ &= 1/2 \langle (x, y, z - 2r), (rx, \sigma y, \sigma(z - 2r)) \rangle \\ &= 1/2 [rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2]. \end{aligned}$$

Note que a condição $V(x, y, z) = c > 0$ define um elipsoide em \mathbb{R}^3 com centro em $(0, 0, 2r)$. Vamos então mostrar que as soluções de (3.5) entram, e permanecem confinadas, dentro da região limitada pelo elipsoide $rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = 2c$ para algum $c > 0$. Defina

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 \leq 2c\}.$$

A derivada da função V se lê

$$\begin{aligned} V'(x, y, z) &= rx \frac{dx}{dt} + \sigma y \frac{dy}{dt} + \sigma(z - 2r) \frac{dz}{dt} \\ &= r\sigma xy - r\sigma x^2 + r\sigma xy - \sigma xyz - \sigma y^2 - b\sigma z^2 + 2rb\sigma z + \sigma xyz - 2r\sigma xy \\ &= -r\sigma x^2 - \sigma y^2 - b\sigma(z^2 - 2rz) = -\sigma [rx^2 + y^2 + b(z^2 - 2rz)], \end{aligned}$$

mas $b(z^2 - 2rz)$ também pode ser escrito como $b[(z - r)^2 - r^2]$ de forma que temos

$$V'(x, y, z) = -\sigma [rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2]. \quad (3.6)$$

A equação $rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 = \rho$ também define um elipsoide quando $\rho > 0$. Neste caso, teremos $V' < 0$ quando $\rho > br^2$. Além disso, para que sejam satisfeitas simultaneamente as duas condições para que V seja uma função de Lyapunov devemos escolher $c > 0$ tal que o elipsoide $rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 = br^2$ esteja inteiramente contido no elipsoide $rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = 2c$. Portanto, temos dois elipsoides

$$E_1 : \frac{x^2}{br} + \frac{y^2}{br^2} + \frac{(z - r)^2}{r^2} = 1 \quad \text{e} \quad E_2 : \frac{x^2}{(2c/r)} + \frac{y^2}{(2c/\sigma)} + \frac{(z - 2r)^2}{(2c/\sigma)} = 1.$$

Então, devemos procurar o valor mínimo de c para que se cumpra a condição $E_1 \subset E_2$. Isso pode ser feito através do método dos multiplicadores de Lagrange sobre dada a restrição $V' < 0$. Considerando os valores clássicos dos parâmetros do Lorenz, ou seja $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$, o valor de c que devemos tomar é

$$c = \frac{b^2 r^2}{2(b-1)}.$$

Para maiores detalhes veja [Spa82].

Assim, podemos redefinir o conjunto Ω da forma

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 \leq b^2 r^2 / (b - 1)\}, \quad (3.7)$$

o qual é uma região limitada e fechada de \mathbb{R}^3 , portanto um conjunto compacto. Assim, como são satisfeitas as condições do Teroema de Lyapunov (8), qualquer solução do sistema de Lorenz que tem condições iniciais fora de Ω convergirá à Ω e permanecerá dentro de Ω por todo o tempo futuro.

Podemos então, enunciar a seguinte

Proposição 2. *O sistema de Lorenz é um sistema dissipativo e suas trajetórias certamente entram, a tempo finito, no domínio absorvente (3.7).*

Capítulo 4

Estabilidade em EDO's Lineares Não-Autônomas

Vamos estudar algumas noções acerca de equações diferenciais lineares não-autônomas, em especial, a estabilidade de seu ponto fixo trivial. Nosso objetivo é transformar o problema de estudar a sincronização e sua estabilidade num problema de estudar a estabilidade da solução trivial de uma equação diferencial linear não-autônoma.

Considere $A(t) : J \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ uma função matricial contínua e uniformemente limitada que toma valores $t \in J \subseteq \mathbb{R}_+$ e a equação diferencial linear não-autônoma

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (4.1)$$

A equação (4.1) satisfaz as condições de existência e unicidade dada a condição inicial $x(s) = x_s$ e mais do que isso, as soluções estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}_+$ [Tes12].

Note que $x(t) = \mathbf{0}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ é uma solução de (4.1) para um dado problema de valor inicial. Chamamos tal solução de **solução trivial**. Por todo este capítulo focaremos o estudo da estabilidade da solução trivial de (4.1) com condição inicial $x(s) \in \mathbb{R}^m$.

Para equações diferenciais lineares autônomas, a estabilidade de $x = \mathbf{0}$ pode ser caracterizada em termos dos autovalores da matriz constante $A(t) = A$. Quando, porém, consideramos que as equações diferenciais lineares são não-autônomas, os autovalores já não servem mais como critério de caracterização da estabilidade [Cop78]. De fato, podemos ter casos em que a matriz $A(t)$ tem todos os autovalores com parte real negativa e ainda assim, a solução trivial seja instável, ver [Cop78] para exemplos. Ou ainda, casos em que as soluções não-triviais de (4.1) convergem ao vetor nulo, porém uma pequena perturbação pode destruir sua estabilidade, ver [BV07] e [JR08] para exemplos.

4.1 Alguns Tipos de Estabilidade

Para tratar os principais resultados aqui expostos, necessitamos de algumas definições. A teoria de estabilidade é ampla e vários conceitos sobre estabilidade são encontrados [Tes12], [DL07]. Abordamos alguns desses conceitos que servirão ao nosso propósito.

Definição 18. Dizemos que o ponto fixo $x = \mathbf{0}$ de (4.1) é **estável no sentido de Lyapunov** em $t = s$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(s, \epsilon)$ tais que

$$\|x(s)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq s.$$

Assim, a estabilidade segundo Lyapunov é definida sobre um tempo inicial e, em particular, esse tipo de estabilidade não requer que as trajetórias que começam próximas da solução trivial converjam assintoticamente à mesma. Outro importante conceito de estabilidade é a **estabilidade uniforme**. É um caso especial de estabilidade segundo Lyapunov, que garante que o ponto fixo não

esteja perdendo a estabilidade. Assim, a diferença de tal conceito com relação ao definido em 18 é que δ não depende do tempo inicial s .

Definição 19. Dizemos que o ponto fixo $x = \mathbf{0}$ de (4.1) é **assintoticamente estável** em $t = s$ se o mesmo é estável no sentido de Lyapunov e se é localmente atrator, isto é, existe uma vizinhança $U(\mathbf{0}) \ni x(s)$ tal que $x(t)$ converge assintoticamente à $\mathbf{0}$ quando $t \rightarrow \infty$, com $x(t) \in U(\mathbf{0})$ para cada t . Ou seja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{0}.$$

Estamos, porém, interessados na estabilidade uniformemente assintótica. O interesse nesse tipo de estabilidade está baseada no fato de que a mesma é preservada quando o sistema sofre pequenas perturbações caracterizando assim a propriedade de persistência.

Definição 20. O ponto fixo $x = \mathbf{0}$ de (4.1) é **uniformemente assintoticamente estável** se existe $\delta > 0$, independente de t , tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\tau = \tau(\epsilon)$ satisfazendo $\|x(s)\| < \delta$ e $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq s + \tau$.

4.2 Operador de Evolução

Para o nosso propósito, precisamos de uma forma fechada para expressar as soluções de (4.1). A partir da teoria de equações diferenciais ([Tes12]) nós podemos escrever tal solução sob a forma

$$x(t) = T(t, s)x(s) \quad (4.2)$$

onde $T(t, s)$ é chamado de **operador de evolução** e $x(s)$ é a condição inicial. O operador de evolução satisfaz as seguintes propriedades:

1. $T(t, s)T(s, u) = T(t, u)$
2. $T(t, s)T(s, t) = I_m$

A propriedade 1 é imediata tendo-se em vista que podemos escrever $T(t, s)x(s) = \phi_t(x(s)) = \phi_{t,s}(x)$ e as propriedades sobre o fluxo (ver página 9). Considerando a propriedade 1, podemos sempre escolher $t = u$, produzindo $T(u, s)T(s, u) = T(u, u) = I_m$, donde segue que $T(t, s)$ é um isomorfismo com inversa dada por $T^{-1}(t, s) = T(s, t)$, valendo-se assim a propriedade 2.

Exemplo 3. Quando o sistema (4.1) é autônomo, ou seja, quando $A(t) = A$, o operador de evolução do mesmo se lê

$$T(t, s) = \exp[(t - s)A].$$

Existem processos para se encontrar explicitamente o operador de evolução (ver [Tes12] por exemplo), porém não estamos interessados em obter analiticamente tal operador mas em estimar sua magnitude. A seguir, daremos uma definição necessária à abordagem dos principais resultados aqui expostos.

Definição 21. Seja $T(t, s)$ o operador de evolução associado ao sistema (4.1). Dizemos que tal operador possui **contração uniforme** se

$$\|T(t, s)\| \leq ke^{-\eta(t-s)}$$

com k e η positivos.

O termo contração uniforme, associado ao operador de evolução, significa que tal operador de fato possui contração, como expressado pela norma, pois a mesma converge exponencialmente rápido à zero, e que as constantes η e k não possuem dependência do tempo inicial s .

O próximo teorema à ser abordado, relaciona intimamente as definições 20 e 21.

Teorema 9. *Seja $T(t, s)$ o operador de evolução da equação (4.1) e considere a solução trivial da mesma $x(t) = \mathbf{0}$. Tal solução é uniformemente assintoticamente estável se e somente se $T(t, s)$ possui contração uniforme.*

Prova: Faremos primeiro a volta. Escrevamos a solução de (4.1) sob a forma $x(t) = T(t, s)x(s)$ e então tomamos a norma em ambos os lados, assim

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &= \|T(t, s)x(s)\| \\ &\leq \|T(t, s)\|\|x(s)\| \\ &\leq ke^{-\eta(t-s)}\|x(s)\|.\end{aligned}$$

Queremos mostrar que $x(t) = \mathbf{0}$ é uniformemente assintoticamente estável, ou seja, deseja-se que exista $\delta > 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$, exista $\tau = \tau(\epsilon) > 0$ tais que, sendo $\|x(s)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq s + \tau$. Dessa forma, devemos ter

$$\begin{aligned}\delta ke^{-\eta(t-s)} &< \epsilon \quad \Rightarrow \\ -\eta(t-s) &< \ln(\epsilon/\delta k) \quad \Rightarrow \\ t &> s + (1/\eta) \ln(\delta k/\epsilon).\end{aligned}$$

Assim, basta tomar $\tau = (1/\eta) \ln(\delta k/\epsilon)$ para garantir o que desejamos.

Para provar a ida, considere que a solução $x(t) = \mathbf{0}$ é uniformemente assintoticamente estável. Então existe $\delta > 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $\tau = \tau(\epsilon) > 0$, com $\|x(s)\| \leq \delta$, e $\|x(t)\| \leq \epsilon$, onde $t \geq s + \tau$. Escolha então $\epsilon = \delta/c$, $c > 1$, e considere a sequência $t_n = s + n\tau$, com $n \in \mathbb{N}$. Perceba então que

$$\|x(t)\| = \|T(t, s)x(s)\| \leq \frac{\delta}{c}$$

para qualquer $\|x(s)\|/\delta \leq 1$, o que implica

$$\|T(t, s)\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|T(t, s)u\| \leq \frac{1}{c},$$

onde $u = \|x(s)\|/\delta$. Pela propriedade 1 do operador de evolução, ou seja, $T(t, u) = T(t, s)T(s, u)$, podemos fazer

$$\begin{aligned}\|T(t_2, s)\| &= \|T(s + 2\tau, s + \tau)T(s + \tau, s)\| \\ &\leq \|T(s + 2\tau, s + \tau)\|\|T(s + \tau, s)\| \\ &\leq \frac{1}{c^2}.\end{aligned}$$

Assim, por indução, temos

$$\|T(t_n, s)\| \leq \frac{1}{c^n},$$

onde, podemos impor que $1/c^n = e^{-\eta(t_n-s)}$. Então $-\eta(t_n - s) = \ln c^{-n}$, mas $t_n - s = n\tau$, o que implica que podemos tomar $\eta = \ln(c)/\tau$, de forma à conseguir que

$$\|T(t_n, s)\| \leq e^{-\eta(t_n-s)}.$$

Fica ainda um último ponto a resolver, que é exatamente que neste caso, temos uma contração uniforme para o operador de evolução, porém escrita em tempo discreto. Para torná-lo em tempo contínuo, utilizamos o Teorema do Valor Intermediário e consideramos o caso geral em que $t =$

$s + v + n\tau$, onde $0 \leq v < \tau$. Assim

$$\begin{aligned} \|T(t, s)\| &\leq e^{-\eta(t-s)} \\ &= e^{-\eta(t-s-v)} \\ &= ke^{-\eta(t-s)} \end{aligned}$$

com $k = e^{\eta v}$. ■

4.3 Persistências da Solução Trivial

Dizemos que o sistema $\dot{x} = f(t, x)$, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, é persistente, quando o mesmo mantém suas propriedades qualitativas sob pequenas perturbações ou mudanças no campo de vetores f , veja no livro [GH83] uma discussão mais detalhada. Mas, o que entendemos por “pequenas perturbações”? Muitos sistemas físicos interessantes possuem, tipicamente, uma dependência de parâmetros, os quais aparecem nas definições das equações como é o caso do sistema de Lorenz (3.5). Quando esses parâmetros são variados podem acontecer mudanças na estrutura qualitativa das soluções de forma que os pontos fixos podem perder sua estabilidade a medida que essa variação ocorre - essas mudanças são chamadas de bifurcações. Então essa leve mudança nos parâmetros é um dos exemplos do que pode ser uma pequena perturbação no campo de vetores.

No caso particular de nosso interesse temos que f é um campo linear com $f(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Seja $g(t, x)$ uma perturbação de f tal que $g(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e considere o sistema perturbado $\dot{y} = \tilde{f}(t, y)$ onde $\tilde{f} = f + g$. Note que $y = \mathbf{0}$ é sempre solução do sistema perturbado. A pergunta então é: sendo $x = \mathbf{0}$ estável, $y = \mathbf{0}$ é também estável? Sob quais condições a estabilidade é preservada? Esta é uma pergunta interessante pois pode acontecer que tenhamos uma perturbação muito pequena e mesmo assim, a estabilidade da solução trivial seja destruída, veja [BV07] para exemplos. Diremos portanto que a estabilidade de $x = \mathbf{0}$ em (4.1) é persistente quando a mesma é preservada sob perturbações pequenas no campo de vetores.

Voltando agora à teoria das contrações uniformes, sabemos que a mesma está muito relacionada com a propriedade de persistência da estabilidade. Os resultados desta seção tratam dessa relação.

Teorema 10 (Persistência). *Suponha que $A(t)$ é uma função matricial contínua em um intervalo $J \subset \mathbb{R}_+$, referente à equação (4.1). Suponha também que o operador de evolução $T(t, s)$ da mesma possui contração uniforme. Considere $B(t)$ uma função matricial contínua em J satisfazendo*

$$\sup_{t \in J} \|B(t)\| = \delta_0 < \frac{\eta}{k}.$$

Então o operador de evolução $\hat{T}(t, s)$ da equação perturbada

$$\dot{y} = [A(t) + B(t)]y \tag{4.3}$$

também satisfaz $\|\hat{T}(t, s)\| \leq ke^{-\gamma(t-s)}$ com $\gamma = \eta - \delta_0 k$, onde η e k são tais que $\|T(t, s)\| \leq ke^{-\eta(t-s)}$.

Para a prova do teorema sobre a persistência da estabilidade da solução trivial, utilizaremos dois importantes resultados da teoria de equação diferenciais, a saber, o Lema de Grönwall e o Método da Variação dos Parâmetros, que podem ser encontrados no Apêndice B com mais detalhes.

Prova: Usando o método da variação dos parâmetros em (4.3), obtemos

$$y(t) = T(t, s)y(s) + \int_s^t T(t, u)B(u)y(u)du.$$

Tomando a norma sobre a equação acima, e usando a desigualdade triangular, ficamos com

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leq \|T(t, s)y(s)\| + \left\| \int_s^t T(t, u)B(u)y(u)du \right\| \\ &\leq ke^{-\eta(t-s)}\|y(s)\| + \int_s^t \|T(t, u)\| \|B(u)\| \|y(u)\| du \\ &\leq ke^{-\eta(t-s)}\|y(s)\| + \int_s^t \delta_0 ke^{-\eta(t-u)}\|y(u)\| du,\end{aligned}$$

onde as sucessivas desigualdades foram obtidas através da propriedade sub-multiplicativa da norma induzida (Lema 1).

Neste ponto, tomamos a função $\omega(t) = e^{\eta t}\|y(t)\|$. Multiplicando a última desigualdade por $e^{\eta t}$, obtemos

$$\omega(t) \leq k\omega(s) + \int_s^t \delta_0 k\omega(u)du$$

a qual podemos usar o lema de Grönwall, de forma que obtemos

$$\omega(t) \leq k\omega(s)e^{\delta_0 k(t-s)}.$$

Substituindo nesta última desigualdade a função $\omega(t)$, segue que

$$\|y(t)\| \leq ke^{(-\eta+\delta_0 k)(t-s)}\|y(s)\|.$$

Logo, podemos tomar $\|\hat{T}(t, s)\| \leq ke^{-\gamma(t-s)}$, com $\gamma = \eta - \delta_0 k$. ■

O próximo resultado é importante pois o mesmo dá as hipóteses sobre a qual o resto de Taylor, advindo da linearização pela expansão em série de Taylor, não destrói a estabilidade da solução trivial.

Proposição 3 (Princípio da Linearização). *Considere que o operador de evolução da equação (4.1) tem contração uniforme. Considere a equação perturbada*

$$\dot{y} = A(t)y + R(t, y) \tag{4.4}$$

onde $R(t, y)$ é tal que $R(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\forall t \geq 0$, e a seguinte propriedade é satisfeita

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{se } \|y\| \leq \delta \Rightarrow \|R(t, y)\| \leq \epsilon\|y\|, \forall t \geq 0.$$

Então o operador de evolução de (4.4) tem contração uniforme.

Prova: Utilizando a variação dos parâmetros na equação (4.4) tem-se

$$y(t) = T(t, s)y(s) + \int_s^t T(t, u)R(u, y(u))du \tag{4.5}$$

onde $T(t, s)$ é o operador de evolução de (4.1), que por hipótese satisfaz $\|T(t, s)\| \leq ke^{-\eta(t-s)}$. Calculando a norma em (4.5) e utilizando as hipóteses dadas tem-se

$$\|y(t)\| \leq \|T(t, s)\|\|y(s)\| + \int_s^t \|T(t, u)\|\|R(u, y(u))\|du \tag{4.6}$$

$$\leq ke^{-\eta(t-s)}\|y(s)\| + \int_s^t \epsilon ke^{-\eta(t-u)}\|y(u)\|du. \tag{4.7}$$

Considere a função real $\omega(t) = e^{\eta t} \|y(t)\|$. Multiplicando $e^{\eta t}$ em (4.7) teremos

$$\omega(t) \leq k\omega(s) + k\epsilon \int_s^t \omega(u) du. \quad (4.8)$$

A partir daqui, utilizamos o Lema de Grönwall em (4.8) e seguimos os mesmos passos utilizados na prova do Teorema 10 mostrando que

$$\|y(t)\| \leq k e^{(-\eta + \epsilon k)(t-s)} \|y(s)\|.$$

Escolhendo $\epsilon < \eta/k$, encerra-se a demonstração. ■

Algo interessante que a Proposição 3 nos diz é que a estabilidade da solução trivial de (4.1) não muda mesmo considerando a perturbação não-linear $R(t, y)$ com a propriedade descrita, isso porque podemos tomar ϵ tão pequeno quando desejarmos. Note ainda que a condição dada sobre $R(t, y)$ é a mesma condição dada sobre o resto de Taylor [Lim10], isto é, $\lim_{y \rightarrow 0} R(t, y)/\|y\| = 0$.

4.4 Critérios para Contração Uniforme

O resultado a seguir fornece um importante critério a respeito de como garantir que o operador $T(t, s)$ de (4.1) tenha contração uniforme. O Teorema da Diagonal Dominante garante que os coeficientes da diagonal da matriz $A(t)$ de (4.1) controlam a estabilidade do sistema.

Teorema 11 (da Diagonal Dominante). *Seja $A(t) = [A_{ij}(t)]_{i,j=1}^m$ uma função matricial contínua e limitada com $t \in \mathbb{R}_+$. Suponha que existe uma constante $\eta > 0$ tal que*

$$A_{ii}(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^m |A_{ij}(t)| \leq -\eta < 0 \quad (4.9)$$

para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $i = 1, \dots, m$. Então o operador de evolução de (4.1) tem contração uniforme.

Prova: Seja $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Usaremos a norma $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ para estimar $x(t)$. Fixe $u > 0$, então para algum $1 \leq i \leq m$ tem-se que $\|x(u)\|_\infty = |x_i(u)|$ ou ainda $\|x(u)\|_\infty^2 = x_i^2(u)$. Analisaremos a norma $\|x(t)\|_\infty^2$ pois tal função é diferenciável. Note porém que poderia acontecer de que exatamente neste u fixado a norma $\|x(u)\|_\infty^2$ ser atingida em mais de um i . Suponha por exemplo, sem perder a generalidade, que esse máximo é atingido em h e k , $h, k \in \{1, \dots, m\}$. Então surge a pergunta: para t numa vizinhança de u , qual seria maior, $x_h^2(t)$ ou $x_k^2(t)$? A resposta é: independente de quem seja maior, esse máximo continuará sendo o máximo por pelo menos um intervalo $(u, u + \epsilon) = I$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Suponha que o que acabamos de afirmar não seja verdade, isto é, suponha que para $t \in I$, o máximo alterna-se entre as componentes h e k um número arbitrário de vezes. Neste caso, teríamos que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|x(u + \epsilon)\|_\infty^2$ não existe e portanto $d/dt \|x(t)\|_\infty^2$ não existiria $t = u$, o que é absurdo pois todas as componentes $x_i^2(t)$ são diferenciáveis visto que $x(t)$, solução não-trivial de (4.1), é diferenciável. Portanto podemos impor, sem perder a generalidade, que se $x_k^2(u) = \|x(u)\|_\infty^2$ então $x_k^2(t) = \|x(t)\|_\infty^2$ para todo $t \in I$. Então, tomando $t \in I$ tem-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t)\|_\infty^2 = x_k(t) \frac{d}{dt} x_k(t).$$

Mas, note que de (4.1) tem-se

$$\frac{d}{dt} x_k(t) = \sum_{j=1}^m A_{kj}(t) x_j(t),$$

assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t)\|_\infty^2 &= \left[A_{kk}(t)x_k^2(t) + \sum_{j \neq k} A_{kj}(t)x_j(t)x_k(t) \right] \\ &\leq \left[A_{kk}(t)x_k^2(t) + \sum_{j \neq k} |A_{kj}(t)|x_k^2(t) \right] = \left[A_{kk}(t) + \sum_{j \neq k} |A_{kj}(t)| \right] x_k^2(t), \end{aligned}$$

onde por hipótese vale (4.9). Então

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|_\infty^2 \leq -2\eta x_k^2(t) = -2\eta \|x(t)\|_\infty^2.$$

Tomando a integral, definida em $[s, t] \subset I$, temos

$$\|x(t)\|_\infty^2 \leq \|x(s)\|_\infty^2 - 2\eta \int_s^t \|x(v)\|_\infty^2 dv,$$

da qual podemos usar a desigualdade de Grönwall, obtendo

$$\|x(t)\|_\infty \leq e^{-\eta(t-s)} \|x(s)\|_\infty \quad (4.10)$$

Como a derivada de $\|x(t)\|_\infty^2$ é estritamente negativa, então $\|x(t)\|_\infty^2$ não possui máximo local em $t \in I$ e portanto vale que $\|x(t)\|_\infty^2 < \|x(s)\|_\infty^2$ para $t > s$. Mais do que isso, neste caso, é possível garantir que $\|x(t)\|_\infty$ é uma função monotonicamente decrescente em \mathbb{R}_+ (veja [Cop78], a partir da página 55 para mais detalhes), então a desigualdade (4.10) será válida para todo $t \in \mathbb{R}_+, t \geq s$. Como em $\text{Mat}(\mathbb{R}, m)$ todas as normas são equivalentes, então existem $c > 0$ e $k > 0$ tais que $c\|T(t, s)\|_\infty \leq \|T(t, s)\| \leq k\|T(t, s)\|_\infty$, portanto $\|T(t, s)\| \leq ke^{-\eta(t-s)}$. ■

Agora, enunciamos um novo critério que está relacionado com o espectro da parte simétrica da matriz $A(t)$ de (4.1).

Teorema 12 (da Parte Simétrica). *Considere o sistema (4.1). Suponha que $A(t)$ é uniformemente limitada em $t \in \mathbb{R}_+$ e que sua parte simétrica é negativa-definida. Então o operador de evolução de (4.1) satisfaz $\|T(t, s)\|_2 \leq e^{\eta(t-s)}$, onde $\eta < 0$ é uma cota superior para os autovalores da parte simétrica de $A(t)$.*

Prova Considere $x \in \mathbb{R}^m$ e $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$. Considere a solução não-trivial $x(t)$ de (4.1) definida em \mathbb{R}_+ . A função $\|x(t)\|_2^2$ é contínua e diferenciável. Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x(t)\|_2^2 &= 1/2 \langle A(t)x, x \rangle + 1/2 \langle x, A(t)x \rangle \\ &= \left\langle x, \frac{A(t) + A^\dagger(t)}{2} x \right\rangle = \langle x, B(t)x \rangle \end{aligned}$$

onde $B(t)$ é a parte simétrica de $A(t)$. Neste momento consideraremos a análise para cada t fixado.

Como B é uma matriz simétrica então, pelo Teorema Espectral, seus autovetores ortonormalizados formam uma base de \mathbb{R}^m . Podemos representar x nessa base, $x = \sum_{i=1}^m c_i v_i$, de forma que faz-se valer

$$\begin{aligned} \langle x, Bx \rangle &\leq \left\langle \sum_{i=1}^m c_i v_i, \sum_{i=1}^m c_i \lambda_i v_i \right\rangle \\ &\leq \lambda_m \langle x, x \rangle, \end{aligned}$$

onde $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m < 0$ são os autovalores de B . Como $B(t)$ é uniformemente limitada em t e

negativa-definida podemos garantir que existe $\eta < 0$ tal que $\lambda_m(t) < \eta$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Dessa forma, temos a relação

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|_2^2 \leq 2\eta \|x(t)\|_2^2$$

à qual podemos tomar a integral, definida em $[s, t] \subset \mathbb{R}_+$, $s < t$, e utilizar a desigualdade de Grönwall, produzindo

$$\|x(t)\|_2 \leq e^{\eta(t-s)} \|x(s)\|_2.$$

■

Capítulo 5

Tópicos em Teoria dos Grafos

Abordaremos os fundamentos de teoria dos grafos para estruturar e modelar redes de elementos interagentes afim de fundamentar matematicamente o objetivo de estudar a sincronização e suas estabilidades em tais redes. Por todo o presente capítulo, focaremos o estudo na teoria espectral dos grafos, ou seja, o estudos dos autovalores da uma das matrizes que caracteriza a estrutura de conexão, a saber, o Laplaciano. Inicialmente daremos algumas definições necessárias ao longo do presente capítulo. Consideraremos apenas grafos finitos.

Definição 22. Um **grafo** $G = (V(G), E(G))$ consiste de um conjunto finito de vértices $V(G)$ e um conjunto, consequentemente finito, de arestas $E(G)$, onde cada aresta consiste de um par de vértices.

Quando ao referirmos que uma aresta $\{u, v\} \in E(G)$ vamos utilizar a notação $u \sim v$ e dizer que u é vizinho de v .

Um grafo *direcionado* consiste de um conjunto de vértices $V(G)$ e um conjunto de arestas $E(G)$, onde cada aresta consiste de um par de vértices ordenados.

Definição 23. Dizemos que um grafo é **não-direcionado** se os pares de vértices $\{u, v\} \in E(G)$ são não-ordenados.

Assim, em grafos não-direcionados, se u é vizinho de v então reciprocamente v é vizinho de u .

Definição 24. Diremos que um grafo é **simples** quando o mesmo não possui auto-conexões ou múltiplas arestas entre dois vértices.

Definição 25. O **grau** de um vértice i é numericamente igual ao número de vizinhos que o mesmo possui. Indicaremos o grau do vértice i por g_i .

Um *caminho* em um grafo é uma sequência de vértices distintos e conectados.

Definição 26. Um grafo é **conexo** se para quaisquer dois vértices u e v existe pelo menos um caminho de u até v .

De forma semelhante, dizemos que G é *não-conexo* se em G existe algum vértice que não pode ser alcançado por qualquer outro. Para todo grafo não-conexo G , sempre podemos decompô-lo da forma simbólica $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_r$, se G tem r componentes conexas, de forma que os subgrafos G_1, G_2, \dots, G_r são chamados componentes conexas de G .

Trabalharemos apenas com grafos que são simples, não-direcionados e conexos. Um grafo pode ser simples e ainda assim representar matematicamente uma rede complexa. Para que o leitor não faça confusão desses conceitos, note que a rede é simples como traz a definição acima, porém pode ter uma estrutura não regular de conexão entre seus elementos. Um grafo simples e regular é aquele o qual podemos identificar precisamente a regra que gera o conjunto de vértices.

Para quaisquer dois pares de vértices $u, v \in V(G)$, a *distância* entre u e v é o menor caminho dentre todos os possíveis entre u e v .

Definição 27. Em um grafo G , o **diâmetro** de G é a máxima distância sobre todos os pares de vértices em G . Utilizaremos a letra “ d ” para indicar o diâmetro de G .

5.1 Matrizes de Adjascência e Laplaciana

Seja G um grafo simples e não-direcionado com n vértices. A **matriz de adjacência** de G , denotada por A_G ou simplesmente $A = [A_{ij}]_{i,j=1}^n$, quando a indicação do tipo de grafo não for necessária, é uma matriz $n \times n$ definida da seguinte forma

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ são vizinhos;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que por construção, uma matriz de adjacência é uma matriz simétrica. Em termos dessa matriz, o grau g_i , do vértice i de G pode ser escrito como

$$g_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}.$$

A **matriz laplaciana** de G , denotada por L_G ou simplesmente $L = [L_{ij}]_{i,j=1}^n$, é uma matriz $n \times n$ definida como segue:

$$L_{ij} = \begin{cases} g_i & \text{se } i = j; \\ -1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ são vizinhos;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja D_G a matriz diagonal formada pelos graus dos vértices de G . Então podemos reescrever a matriz laplaciana na forma

$$L_G = D_G - A_G.$$

De forma mais precisa, note que os elementos da matriz laplaciana e da matriz de adjacência estão relacionados da seguinte maneira

$$L_{ij} = \delta_{ij}g_i - A_{ij} \quad (5.1)$$

onde o δ_{ij} é o delta de Kronecker.

A matriz laplaciana, por construção, também é uma matriz simétrica. Na seção a seguir, discorremos algumas propriedades relacionadas à essa importante matriz.

5.2 Propriedades Espectrais do Laplaciano

Resumimos as principais propriedades relacionadas ao espectro do laplaciano no

Teorema 13. *Seja G um grafo simples e não-direcionado e L sua respectiva matriz laplaciana. Então*

- (a) *Todos os autovalores de L são reais.*
- (b) *0 (zero) é autovalor de L associado ao autovetor $\mathbf{c} = (c, c, \dots, c)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ o qual é único. Em particular, podemos considerar o autovetor $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$.*
- (c) *L é positiva semi-definida e seus autovalores podem ser ordenados, de acordo com suas multiplicidades algébricas, da forma*

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

- (d) *A multiplicidade do autovalor 0 é igual ao número de componentes conexas de G .*

Prova:

(a) Sabemos que a matriz L é simétrica, ou seja, $L = L^\dagger$. Considere λ um autovalor de L e v o autovetor associado a λ . Assim, $Lv = \lambda v$, donde segue que $v^\dagger Lv = \lambda v^\dagger v$. Note que $(v^\dagger Lv)^\dagger = v^\dagger Lv$. Logo, $v^\dagger Lv = \lambda^\dagger v^\dagger v = \lambda v^\dagger v$, ou seja, $\lambda^\dagger = \lambda$.

(b) Note que

$$L\mathbf{c} = \left(\sum_{j=1}^n L_{1j}c, \dots, \sum_{j=1}^n L_{nj}c \right) = (0, \dots, 0) = \mathbf{0}\mathbf{c}.$$

Por outro lado, se $Lv = \mathbf{0}$ então

$$\sum_{j=1}^n L_{1j}v_j = 0, \quad \sum_{j=1}^n L_{2j}v_j = 0, \quad \dots, \quad \sum_{j=1}^n L_{nj}v_j = 0$$

mas

$$\sum_j L_{1j}v_j = L_{11}v_1 + \sum_{j=2}^n L_{1j}v_j = - \sum_{j=2}^n L_{1j}v_1 + \sum_{j=2}^n L_{1j}v_j = \sum_{j=1}^n L_{1j}(v_j - v_1) = 0,$$

assim, seguindo o mesmo argumento temos que

$$\sum_j L_{1j}(v_j - v_1) = 0, \quad \sum_j L_{2j}(v_j - v_2) = 0, \quad \dots, \quad \sum_j L_{nj}(v_j - v_n) = 0$$

o que produz

$$\sum_j L_{1j}(v_j - v_1) + \sum_j L_{2j}(v_j - v_2) + \dots + \sum_j L_{nj}(v_j - v_n) = \sum_i \sum_j L_{ij}(v_j - v_i) = 0$$

implicando $v_j = v_i \quad \forall i, j = 1, \dots, n$.

(c) Mostraremos que L é positiva semi-definida. Seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Então, queremos mostrar que $x^\dagger Lx \geq 0$. Note que

$$\begin{aligned} x^\dagger Lx &= \sum_i x_i \sum_j L_{ij}x_j \\ &= \sum_i x_i \sum_j (D_{ij} - A_{ij})x_j = \sum_i x_i \sum_j D_{ij}x_j - \sum_i x_i \sum_j A_{ij}x_j \end{aligned}$$

mas

$$\sum_i x_i \sum_j D_{ij}x_j = \sum_i g_i x_i^2 = \sum_i \sum_j A_{ij}x_i^2.$$

Então

$$x^\dagger Lx = \sum_i \sum_j A_{ij}x_i^2 - \sum_i \sum_j A_{ij}x_i x_j,$$

mas como A é simétrica tem-se que

$$\sum_i \sum_j A_{ij}x_i^2 = \sum_i \sum_j A_{ji}x_j^2 = \sum_i \sum_j A_{ij}x_j^2,$$

assim,

$$\begin{aligned} 2x^\dagger Lx &= \sum_i \sum_j A_{ij}x_i^2 + \sum_i \sum_j A_{ij}x_j^2 - 2 \sum_i \sum_j A_{ij}x_i x_j \\ &= \sum_i \sum_j A_{ij}(x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2) = \sum_i \sum_j A_{ij}(x_i - x_j)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

portanto,

$$x^\dagger Lx \geq 0.$$

Como L é positiva semi-definida, segue que seus autovalores são não-negativos e portanto podemos

ordená-los da forma

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Para provar a afirmação (d), devemos notar que se o grafo G tem r componentes conexas, sendo G_1, \dots, G_r suas componentes, então é possível representar L como uma divisão em blocos L_1, \dots, L_r . Seja m a multiplicidade algébrica do 0. Então cada L_i tem um autovetor \mathbf{c}_i associado ao autovalor 0. Note que $\mathbf{c}_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$ pode ser definida como

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \text{ pertence a componente } i \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

portanto $m \geq r$. Como os autovetores \mathbf{c}_i são únicos então $m = r$. ■

Analisar o espectro do Laplaciano é de grande importância ao cumprimento do objetivo de estudar a estabilidade da sincronização em redes. De forma mais precisa, sabemos que o segundo autovalor do laplaciano está intimamente relacionado ao valor do parâmetro crítico de acoplamento entre os elementos da rede para a sincronização da mesma e sua respectiva estabilidade.

5.3 Espectro de Alguns Grafos Regulares

Vamos agora examinar os autovalores e os autovetores do Laplaciano de grafos com estrutura regular de conexão. De forma mais precisa, vamos examinar

1. O grafo *complete* de n vértices, K_n , tal que $E(K_n) = \{(u, v) : u \neq v\}$;
2. O grafo *star* de n vértices, S_n , tal que $E(S_n) = \{(1, v) : 2 \leq v \leq n\}$;
3. O grafo *path* de n vértices, P_n , tal que $E(P_n) = \{(u, u+1) : 1 \leq u < n\}$ e
4. O grafo *ring* de n vértices, R_n , que além de ter todas as arestas do grafo *path* possui também a aresta $(1, n)$.

Proposição 4. *O Laplaciano de K_n tem autovalor 0 (zero) com multiplicidade de 1 e autovalor n com multiplicidade $n - 1$.*

Prova: Como o grafo K_n é conexo, segue pelo Teorema 13 (d) que o autovalor 0 (zero) tem multiplicidade 1. Seja $v = (v(1), \dots, v(n))$ um vetor qualquer, não-nulo, ortogonal ao vetor $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, então

$$\sum_i v(i) = 0.$$

Assuma sem perder a generalidade que $v(1) \neq 0$. Vamos calcular a primeira coordenada de $L_{K_n} v$. Ficamos com

$$\begin{aligned} (L_{K_n} v)(1) &= g_1 v(1) - \sum_{i=2}^n v(i) \\ &= (n-1)v(1) - \sum_{i=2}^n v(i) = nv(1), \end{aligned}$$

onde $g_1 = \dots = g_n = n - 1$ é o grau do vértice 1. Estendendo a análise para todas as coordenadas de v temos que $L_{K_n} v = nv$. ■

Lema 3. *Seja G um grafo conexo de n vértices e sejam $i, j \in \{2, \dots, n\}$ vértices de grau 1 tais que ambos estão conectados a um outro vértice k . Então o vetor $v(u)$ dado por*

$$v(u) = \begin{cases} 1 & \text{para } u = i; \\ -1 & \text{para } u = j; \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é um autovetor do Laplaciano de G com autovalor 1.

Proposição 5. *O grafo S_n tem autovalor 0 (zero) com multiplicidade 1, autovalor 1 com multiplicidade $n - 2$ e autovalor n com multiplicidade 1.*

Prova: Como S_n é um grafo conexo então pelo Teorema 13 (d) segue que o autovalor 0 tem multiplicidade 1. Aplicando o Lema 3 aos vértices i e $i+1$ encontramos $n-2$ autovetores linearmente independentes. Afim de encontrar o último autovalor utilizamos o fato de que o traço de uma matriz é igual à soma de seus autovalores. Notamos que $\text{tr}(L_{S_n}) = 2n - 2$. Como identificamos $n - 1$ autovalores cuja soma é $n - 2$, então o último autovalor é igual a n . ■

Antes de enunciar a próxima proposição vamos discorrer algumas palavras sobre o Laplaciano de R_n . De forma explícita o mesmo se lê

$$L_{R_n} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Dado um vetor de $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, notamos que a ação de L_{R_n} sobre v produz

$$(L_{R_n} v)_k = -v_{k+1} - v_{k-1} + 2v_k,$$

para $1 \leq k \leq n$. Note ainda que dada uma função real $f(t)$ de classe C^2 , a sua segunda derivada pode ser escrita da forma

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2}.$$

Sendo assim, vemos que o resultado da ação de L_{R_n} sobre v se assemelha a segunda derivada discreta, escolhendo $h = 1$. As funções reais tais que suas segunda derivada é um múltiplo de si mesmo são os senos, cossenos e exponenciais, que por sua vez pode ser expressa em função de senos e cossenos. Podemos então enunciar a seguinte

Proposição 6. *O grafo R_n tem autovetores*

$$x_k(u) = \sin\left(\frac{2ku\pi}{n}\right)$$

$$y_k(u) = \cos\left(\frac{2ku\pi}{n}\right)$$

com $0 \leq k \leq n/2$ se n é par e $0 \leq k \leq (n-1)/2$ se n é ímpar e $1 \leq u \leq n$. Ambos os autovetores têm autovalor $2 - 2\cos(2k\pi/n)$. O vetor $x_0(u) = \mathbf{0}$ deve ser desconsiderado e se n é par então da mesma forma o vetor $x_{n/2}(u) = \mathbf{0}$ deve ser desconsiderado. Note que $y_0(u) = \mathbf{1}$ é o autovetor constante.

Prova: Para encontrar o autovalor vamos considerar apenas o vértice 1, ou seja, $u = 1$ sem perder a generalidade. Então, sabendo que $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ e que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$, temos

$$\begin{aligned} L_{R_n} x_k(1) &= 2x_k(1) - x_k(0) - 2x_k(2) \\ &= 2\sin(2k\pi/n) - 2\sin(2k\pi/n)\cos(2k\pi/n) \\ &= \left[2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] x_k(1). \end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned}
 L_{R_n} y_k(1) &= 2y_k(1) - y_k(0) - 2y_k(2) \\
 &= 2 \cos(2k\pi/n) - 1 - \cos(2 \cdot 2k\pi/n) \\
 &= 2 \cos(2k\pi/n) - 1 - \cos^2(2k\pi/n) - \sin^2(2k\pi/n) \\
 &= \left[2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right] \cos(2k\pi/n) = \left[2 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right] y_k(1).
 \end{aligned}$$

■

Antes de enunciar o próximo resultado vamos verificar uma importante relação entre os grafos P_n e R_{2n} . Vamos olhar para P_n como um quociente de R_{2n} pela seguinte relação de equivalência: Dados u e v vértices de R_{2n} temos que u é equivalente a v se e somente se $u + v = 2n + 1$. Dessa forma, por exemplo considerando $n = 5$, ou seja, considerando os grafos P_5 e R_{10} , em R_{10} estamos identificando os vértices 1 e 10, 2 e 9 e assim por diante, tornando o quociente de R_{2n} pela relação de equivalência dada igual a P_n .

Argumentos análogos aos utilizados na Proposição 6 nos mostram que

Proposição 7. *O Laplaciano de P_n tem os mesmos autovalores de R_{2n} e autovetores*

$$v_k(u) = \sin(ku\pi/2n + \pi/2n),$$

com $0 \leq k \leq n$.

Teorema 14. *Seja G um grafo simples de n vértices, d o seu diâmetro, g_1 o menor grau entre todos os vértices e λ_2 o segundo autovalor do laplaciano. Então*

1. $\lambda_2 \geq \frac{4}{nd}$
2. $\lambda_2 \leq \frac{ng_1}{n-1}$

As provas para estas desigualdades podem ser encontradas em [Moh91] e [Fie73] respectivamente. Agrupamos os principais resultados da análise espectral do Laplaciano na Tabela 5.1, onde g_1 e g_n representam respectivamente o menor e o maior grau no grafo.

Grafo	λ_2	g_n	g_1	d
K_n	n	$n-1$	$n-1$	1
R_n	$2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$	2	2	$(n+1)/2$ se n é ímpar $n/2$ se n é par
S_n	2 se $n = 2$ 1 se $n > 2$	$n-1$	1	2
P_n	$2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$	1	1	$n-1$

Tabela 5.1: *Propriedades espectrais do Laplaciano de algumas redes regulares.*

5.4 Redes Complexas

Nesta seção abordaremos alguns exemplos de redes complexas, como elas são formadas, suas propriedades e aplicações. Inicialmente daremos a definição formal desse termo.

Definição 28. *Uma rede, modelada a partir de um grafo G , é dita ser **complexa** se G não possui uma estrutura regular de conectividade.*

Os exemplos que queremos abordar de redes complexas estão separados em subseções como segue.

5.4.1 Redes Aleatórias

As redes aleatórias, ou redes que seguem o modelo Erdős-Rényi, tem a seguinte característica de geração: para um dado p fixo, $0 \leq p \leq 1$, cada aresta em potencial é escolhida com probabilidade p , independentemente das outras arestas. Dessa forma, todos os vértices de um grafo aleatório tem a mesma esperança para o grau. Nesse modelo de rede, podem existir vértices isolados, ou seja, a rede pode não ser efetivamente conexa. Quando o número de vértices $n \rightarrow \infty$ então a probabilidade de que a rede seja conexa tende a 1 [CLotMSU06].

5.4.2 Redes Pequeno Mundo

O termo fenômeno de pequeno mundo é usado para se referir à duas propriedades distintas, a saber, a propriedade de pequena distância (dois estranhos estão tipicamente ligados por uma pequena cadeia de conhecidos mútuos) e a propriedade de efeito de agrupamento (duas pessoas que compartilham o mesmo vizinho possuem uma maior probabilidade de também serem vizinhos). Esse tipo de rede foi introduzido por Watts e Strogatz em [WS98]. Alguns exemplos desse tipo de rede complexa são as redes neurais, redes elétricas, redes de co-atuação de atores em filmes americanos, dentre outras. As redes de pequeno mundo encontram-se em um meio termo entre as redes regulares (não complexas) e redes aleatórias. Portanto, uma forma de gerar esse tipo de rede é considerando inicialmente uma rede regular tipo *ring* com n vértices e cada vértice com grau g , em seguida reconecta-se cada aresta de forma aleatória com probabilidade p , onde $p = 0$ gera a rede regular descrita e $p = 1$ uma rede aleatória. Essas redes apresentam, significativo aumento na velocidade de propagação de um sinal e consequente sincronizabilidade.

5.4.3 Redes *Scale-Free*

Nem as redes aleatórias ou as de pequeno mundo tem uma propriedade frequentemente observada em redes do mundo real, a saber, o comportamento de que os vértices possuem probabilidade de ter grau g seguindo a lei de potência

$$P(g) \approx g^{-\beta}.$$

Como sabemos, o grau de um vértice é o número de vizinhos que o mesmo possui. A lei de potência assegura que o número de vértices com grau g é proporcional a $g^{-\beta}$ com $\beta \geq 1$. As redes que seguem essa lei de distribuição de potência são conhecidas como *scale-free networks* [Deh10]. Este modelo de rede é devido a Barabasi e Albert [BA99]. O termo *scale* está relacionado tanto ao espaço quanto ao tempo e de fato, escalas de espaço e tempo podem coexistir simultaneamente. Por exemplo, as redes de chamadas telefônicas tem formas muito similares mesmo em diferentes regiões geográficas e em diferentes horários [CLotMSU06]. As redes que seguem o modelo Barabasi-Albert possuem uma grande quantidade de heterogeneidade, ou seja, enquanto a maioria dos vértices possuem apenas alguns vizinhos, alguns poucos vértices, chamados de *hubs* possuem muitos vizinhos. Um exemplo claro desse tipo de rede é a rede de estradas que conectam as cidades de um país. As grandes cidades possuem muitas alternativas de estradas que estão ligadas à ela, e as pequenas cidades poucas alternativas de ligação com outras cidades, porém o número de cidades pequenas é muito maior do que o de mega-cidades. Por ter essa característica de heterogeneidade, esse tipo de rede complexa, pode não ter sincronização global, isto é, neste caso apenas os *hubs* podem apresentar sincronização porém os demais elementos da rede fiquem fora desse estado [Per10].

Capítulo 6

Redes de Osciladores com Acoplamento Difusivo

O comportamento oscilatório desempenha um papel importante na natureza. Toda forma de vida exibe tal comportamento em cada nível de organização biológica com períodos que podem variar desde milissegundos, como é o caso dos neurônios, a anos, como é o caso da interação presa-predador na ecologia [APN99]. Considere um grafo G que modela uma certa rede. Dizemos então que os elementos da rede (vértices de G) possuem um comportamento oscilatório, ou chamamos os elementos de osciladores, quando os mesmos possuem alguma dinâmica. Um oscilador pode possuir qualquer tipo de dinâmica, isto é, pode ter um comportamento periódico, não-periódico ou caótico. No nosso caso, para qualquer que seja o tipo de comportamento que o oscilador possuir, representamos esse comportamento através de equações diferenciais ordinárias.

A presente dissertação trata apenas o caso de comportamento oscilatório quando as equações diferenciais ordinárias são todas idênticas, em outras palavras, do ponto de vista isolado, os osciladores são todos idênticos, a menos das condições iniciais.

Neste momento, podemos introduzir o nosso modelo de rede. Considere que um grafo G modela uma rede qualquer. Por padrão, consideramos sempre que n é o número de vértices em G . Então, para que possamos introduzir o comportamento oscilatório, sobre cada vértice da rede introduzimos uma cópia da Equação (3.1). A regra de nomeação dos vértices será a seguinte: considerando que os graus dos vértices de G podem ser dispostos da forma

$$g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_n, \quad (6.1)$$

então o vértice i será aquele que possui grau g_i . O modelo de interação entre os elementos de uma rede, que utilizamos, é o modelo de acoplamento chamado difusivo:

Definição 29. *Dizemos que uma rede possui modelo de **acoplamento difusivo** quando a dinâmica do vértice i é influenciada por seu vizinho j de forma proporcional à uma função da diferença de seus estados.*

Chamaremos essa função acoplamento de $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e sem perder a generalidade vamos considerar que a mesma é uma matriz em $\text{Mat}(\mathbb{R}, m)$. A função de acoplamento poderia ter até mesmo um comportamento não-linear, porém por toda a dissertação, vamos considerar apenas o caso em que H é uma matriz positiva-definida. Se supormos que os vértices i e j são vizinhos, então a influência que o vértice j exerce sobre seu vizinho i é igual

$$H(x_j) - H(x_i),$$

de modo que a análise é recíproca. Em muitos exemplos vamos considerar que $H = I_m$, nesse caso esse modelo de acoplamento é chamado de acoplamento totalmente difusivo.

Sendo assim, considerando uma rede de n osciladores idênticos, com acoplamento difusivo, tem-

se que a dinâmica de um vértice i qualquer da rede passa a ser descrita por

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \alpha \sum_{j=1}^n A_{ij} [H(x_j) - H(x_i)] \quad (6.2)$$

onde α é o parâmetro global de acoplamento, ou seja, para todo vértice $i = 1, \dots, n$ temos que α é o mesmo valor. Note que a equação (6.2) está em função dos elementos da matriz de adjacência do grafo e note ainda que o modelo está bem definido pois o mesmo considera que a dinâmica do vértice i é influenciada apenas por seus vizinhos e de fato, $A_{ij} = 0$ se j não é vizinho de i .

Nos podemos também representar o nosso modelo através da matriz laplaciana do grafo, pois se considerarmos apenas o termo de acoplamento e lembrando que $L_{ij} = \delta_{ij}g_i - A_{ij}$ (Equação (5.1)) tem-se

$$\begin{aligned} \sum_j A_{ij} [H(x_j) - H(x_i)] &= \sum_j A_{ij} H(x_j) - g_i H(x_i) \\ &= - \sum_j L_{ij} H(x_j). \end{aligned}$$

Sendo assim, reescrevemos a dinâmica do vértice i da forma

$$\dot{x}_i = f(x_i) - \alpha \sum_{j=1}^n L_{ij} H(x_j). \quad (6.3)$$

O modelo de acoplamento difusivo desempenha um papel importante para a sincronização devido exatamente à sua natureza difusiva, ou seja, a tentativa de igualar os estados dos vértices da rede, influenciando assim positivamente a rede à um estado síncrono. Observe que se todos os elementos da rede possuem a mesma condição inicial, então os termos de acoplamento irão desaparecer identicamente. Além disso, se a rede em algum momento t_0 está em um estado de sincronização, então é possível mostrar que a variedade de sincronização, ou seja

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = s(t) \quad (6.4)$$

para todo $t \geq t_0$ é uma variedade invariante no tempo para qualquer que seja o parâmetro de acoplamento $\alpha > 0$ e para qualquer que seja a escolha da função de acoplamento H . Queremos caracterizar as sincronizações que são persistentes e portanto introduzimos formalmente o termo que é essencial nesta dissertação.

Definição 30 (Sincronização). Dizemos que uma rede está sincronizada se existe $\delta > 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\tau = \tau(\epsilon) > 0$ satisfazendo $\|x_i(u) - x_j(u)\| \leq \delta$, para algum $u \geq 0$, e $\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq \epsilon$ para todo $t \geq u + \tau$, e para quaisquer i e j .

Esta noção de sincronização produz uma variedade de sincronização que é uniformemente assintoticamente estável, o que nos garante a persistência da sincronização sob perturbações.

O termo sincronização global, no nosso contexto, está relacionado à dois aspectos, a saber, global no sentido de que a sincronização não é local (o que pode acontecer, por exemplo em rede complexas tipo *scale-free*), e global no sentido de que a coincidência dos estados (Equação (6.4)) é preservada com o tempo t . Formaliza-se essa propriedade no Teorema 15. De modo mais preciso, vamos mostrar a invariância do movimento globalmente sincronizado (6.4), para isso precisamos reescrever o nosso modelo (6.3) em uma forma compacta onde possamos agrupar as equações do movimento de todos os vértices, de forma que passemos a visualizar apenas uma equação de movimento em \mathbb{R}^{nm} e não n equações em \mathbb{R}^m . Considere então $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{nm}$ onde estamos considerando o empilhamento dos vetores $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m$. Da mesma forma considere $F(X) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$. Então o modelo (6.3) pode ser reescrito da forma

$$\dot{X} = F(X) - \alpha(L \otimes H)X \quad (6.5)$$

onde \otimes representa o produto de Kronecker.

Sejam $\Phi_t(\cdot)$ é o fluxo da equação (6.5) e

$$N = \{\mathbf{1} \otimes s(t) \in \mathbb{R}^{n \times m} : s(t) = x_i(t) \in \mathbb{R}^m, \forall 1 \leq i \leq n\} \quad (6.6)$$

a variedade em $\mathbb{R}^{n \times m}$ que representa o estado síncrono global. Enunciamos então o

Teorema 15. *N é uma variedade invariante pelo fluxo.*

Prova: Vamos considerar apenas o caso em que N é positivamente invariante pelo fluxo. Dada a condição inicial $X_0 \in N$, isto é, $X_0 = \mathbf{1} \otimes s(0)$, afirmamos que $X(t) = \mathbf{1} \otimes s(t)$, $t \geq 0$, é solução de (6.5). De fato pois

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= F(X(t)) - \alpha(L \otimes H)X(t) \\ &= F(\mathbf{1} \otimes s(t)) - \alpha(L \otimes H)(\mathbf{1} \otimes s(t)) \\ &= \mathbf{1} \otimes f(s(t)) - \alpha(L\mathbf{1}) \otimes Hs(t) = \mathbf{1} \otimes f(s(t)) \end{aligned}$$

visto que $L\mathbf{1} = \mathbf{0}$, $F(\mathbf{1} \otimes s(t)) = \mathbf{1} \otimes f(s(t))$ e $\dot{X}(t) = \mathbf{1} \otimes \dot{s}(t)$. Além disso, se $x_i(t) = s(t)$ para todo i , de (6.2) segue que $\dot{s} = f(s)$. Dessa forma, o fluxo pode ser escrito como $\Phi_t(\mathbf{1} \otimes s(0)) = X(t) = \mathbf{1} \otimes s(t)$, logo $\Phi_t(X_0) \in N$. ■

Esse teorema nos fornece uma forte garantia sobre o modelo que estamos utilizando, ou seja, ao considerar que, isoladamente, os osciladores que possuem a mesma dinâmica. Se os osciladores tem as mesmas condições iniciais, então os mesmos estarão automaticamente sincronizados e assim permanecerão por todo o tempo futuro. Se por outro lado, os osciladores não possuem as mesmas condições iniciais, mas para algum $t > 0$, o parâmetro global de acoplamento garante que os osciladores irão sincronizar, então da mesma forma, sincronizados eles estarão por todo o tempo futuro. Para que esse cenário seja coerente, estamos considerando que não existem influências de perturbações sobre a variedade de sincronização. Porém, na prática, essa coincidência de estados só estará garantida se tal regime é estável, ou seja, se esse subespaço permanece inalterado após uma pequena perturbação [RP03].

6.1 Parâmetro Global de Acoplamento

Analisaremos agora o quão importante é o parâmetro de acoplamento α para a sincronização e sua estabilidade.

Considere que o campo de vetores f da dinâmica isolada dos osciladores está associado à uma dinâmica caótica. Considere também que $\alpha = 0$. Se impormos que as condições iniciais dos osciladores são próximas, porém distintas, teremos que as trajetórias associadas aos vértices irão divergir exponencialmente rápido até o ponto em que as diferenças $\|x_j(t) - x_i(t)\|$ para todo $i, j = 1, \dots, n$ com $i \neq j$ serão tão grandes quanto o próprio diâmetro do atrator. Em outras palavras, se considerarmos a rede desacoplada ($\alpha = 0$) e condições iniciais distintas, então não haverá sincronização entre os osciladores. Além disso, se considerarmos agora que a rede está desacoplada mas todos os osciladores possuem as mesmas condições iniciais, teremos que a variedade de sincronização, sob qualquer pequena perturbação, também irá começar a divergir exponencialmente rápido e dessa forma levar os vértices a terem comportamentos distintos em suas dinâmicas, ou seja, neste caso, a variedade de sincronização perde sua estabilidade sob qualquer perturbação. Não consideramos $\alpha < 0$, isso por que neste caso, as soluções de (6.2) podem não ser limitadas, e portanto não faria sentido falar de sincronização. Considere por exemplo $n = 2$, $f = \mathbf{0}$ e $H = I_m$. Neste contexto, a

diferença $x_1(t) - x_2(t) = z(t)$ cumpre

$$z(t) = e^{-2\alpha t} z(0),$$

de forma que a mesma só irá decrescer exponencialmente em t se $\alpha > 0$. Portanto, consideramos sempre $\alpha > 0$.

6.2 Principais Resultados

A questão da estabilidade da variedade de sincronização N é um dos principais objetivos do presente trabalho. Portanto, os nossos principais resultados estão relacionados à mesma. Tais resultados são três, e chamá-los-emos de Teorema da Existência Global das Soluções, o qual está relacionado ao modelo 6.3, Teorema da Estabilidade da Variedade de Sincronização, que garante a sincronização e sua consequente estabilidade e finalmente, Teorema da Persistência da Sincronização, que segue praticamente como um corolário do Teorema do Parâmetro Crítico de Acoplamento. Enunciamos os mesmos no presente capítulo, porém as suas respectivas provas serão dadas no Capítulo 8.

A construção da função de Lyapunov, estabelecida no capítulo 3, é usada para garantir a existência global das soluções, tanto no contexto das equações desacopladas quanto e principalmente para os oscilados em interação - estamos nos referindo ao modelo (6.3). Isso porque para tratar de sincronização dos osciladores, primeiramente precisamos garantir a existência global das soluções e que as mesmas sejam limitadas. Portanto, independentemente da rede considerada, a hipótese de que a dinâmica isolada tem uma função de Lyapunov garante que a dinâmica coletiva também cumpre a mesma propriedade. Enunciamos então o

Teorema 16 (da Existência Global das Soluções). *Considere o modelo de acoplamento difusivo*

$$\dot{x}_i = f(x_i) - \alpha \sum_{j=1}^n L_{ij} H(x_j). \quad (6.7)$$

Assuma que a dinâmica isolada tem função de Lyapunov satisfazendo a Suposição 1. Então, independentemente da rede, as soluções do modelo (6.7) certamente entram, em tempo finito, em um domínio absorvente Ω , e portanto as mesmas são limitas e existem por todo o tempo futuro.

A ideia da prova do Teorema da existência global das soluções, que encontra-se na Seção 8.1 do Capítulo 8, está baseada na hipótese de que a dinâmica isolada, de todos os osciladores, tem função de Lyapunov e consequentemente um domínio absorvente onde as soluções “moram” por todo o tempo. Então, tomamos como principal hipótese a Suposição 1. A partir então dessa hipótese construiremos uma função de Lyapunov para a dinâmica coletiva. Essa função para a coletividade é dada pela soma das funções de Lyapunov para as dinâmicas individuais, mais precisamente, consideramos na soma apenas as funções de Lyapunov das dinâmicas cujas trajetórias ainda estão fora do domínio absorvente. Note que se todas as trajetórias já estão num domínio absorvente então não há nada a se fazer, pois tal domínio é um conjunto compacto, positivamente invariante, e portanto a existência global das soluções já estaria automaticamente garantida. Porém, através dessa função de Lyapunov para a dinâmica coletiva, conseguimos garantir se se todas as n as trajetórias estão fora do domínio absorvente, ou $n-1$ ou \dots ou 1, está(ão) fora do domínio absorvente, a tempo finito todas as trajetórias, coletivamente, isto é, considerando o acoplamento difusivo, entram num domínio absorvente e lá permanecem por todo o tempo futuro.

Graças a construção da função de Lyapunov para a dinâmica isolada e consequentemente para a dinâmica coletiva, sabemos onde moram as soluções. Considerando o modelo de acoplamento difusivo (6.3) e sua forma compacta (6.5), condicionamos que a variedade de sincronização é localmente atratora se as trajetórias possuem condições iniciais próximas, ou seja, para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$ com $\|x_i(0) - x_j(0)\| \leq \delta$ com $\delta > 0$ pequeno, então $x_i(t) \rightarrow x_j(t) \forall i, j$. Essa convergência é determinada pela força de acoplamento α entre os osciladores. Além disso, o parâmetro

crítico que produz essa propriedade advém das contribuições da dinâmica isolada dos osciladores, de propriedades espectrais da função de acoplamento H e do segundo autovalor do laplaciano da rede.

Teorema 17 (da Estabilidade da Variedade de Sincronização). *Considere o modelo de acoplamento difusivo (6.7). Considere também a existência global das soluções de acordo com o Teorema 16. Assuma que as condições iniciais estão em uma vizinhança de Ω e considere*

$$\alpha_c = \frac{\beta}{\lambda_2 \mu_1} \quad (6.8)$$

onde $\beta = \sup_{x \in \Omega} \|P^\dagger Df(x)P\|_\infty$, de forma que a função de acoplamento H do modelo (6.7) é uma matriz positiva-definida com a representação espectral $H = PDP^\dagger$, λ_2 é o segundo autovalor do laplaciano da rede e μ_1 é o primeiro autovalor de H .

Se $\alpha > \alpha_c$, então o estado síncrono é garantido e o mesmo é uniformemente assintoticamente estável.

A prova é apresentada no capítulo 8 Seção 8.2. Abordamos aqui ideia da mesma. Um dos principais ingredientes da prova é considerar a análise de uma só equação diferencial em \mathbb{R}^{nm} e não de n diferentes equações em \mathbb{R}^m . Sob as hipóteses de que as matrizes laplaciana e da função de acoplamento são simétricas, é possível realizar uma mudança linear de coordenadas para uma nova base ortonormalizada formada pelos autovetores das matrizes anteriormente mencionadas. Considerando essa mudança linear de coordenadas, um vetor solução arbitrário é dado por $X = \mathbf{1} \otimes s + U$, onde $s = s(t)$ é uma dada solução síncrona fixada e o incremento U é tal X está numa vizinhança da variedade de sincronização N . Iremos então conseguir condições para que as contribuições dos modos transversais em X convirjam à zero com o tempo, isto é, que os operadores de evolução dos modos transversais tenham todos contração uniforme. As nomenclaturas “modos normais” e “modos transversais” estão relacionadas com os autovetores da matriz laplaciana da rede. O modo normal é exatamente o sub-espço gerado pelo autovetor $\mathbf{1}$. Como consideramos que a dinâmica individual de cada elemento da rede é essencialmente uma dinâmica não-linear, utilizamos a expansão em série de Taylor e analisamos a parte linear do campo de vetores separadamente do resto de Taylor. Após conseguir condições para que os operadores de evolução dos modos transversais tenham todos contração uniforme, consideramos a influência do resto de Taylor sobre a análise. Utilizamos diretamente a Proposição 3 que garante que mesmo considerando o resto de Taylor, uma perturbação não-linear, o estado síncrono não sofre alteração. Para conseguir as condições mencionadas acerca dos modos transversais, projetamos a equação em blocos nos modos normais e transversais afim de analisar apenas as equações diferenciais da mudança linear de coordenadas, que por sua vez são equações diferenciais lineares não-autônomas, e utilizamos o Teorema da diagonal dominante (11) para finalmente obter uma cota para a força de acoplamento α que por sua vez nos dá o critério enunciado.

O próximo resultado segue praticamente como um corolário do Teorema 17, isso devido ao tipo de estabilidade que estamos considerando, isto é, tem-se a propriedade de “robustez” sobre a variedade invariante de sincronização global. Assim, devido a forte garantia do Teorema 17 podemos introduzir perturbações no modelo considerado e esperar que a estabilidade da variedade de sincronização não seja destruída, isso sob certas hipóteses na magnitude da perturbação.

Vamos trabalhar com um modelo de perturbação que age na função de acoplamento do modelo de rede (6.2). Consideramos um modelo de perturbação que age nas funções de acoplamento pois com algumas manipulações algébricas é possível utilizar precisamente o Teorema 10, e então estabelecer a magnitude que as perturbações podem ter para que o estado síncrono seja persistente. Mais precisamente vamos considerar, para cada oscilador $1 \leq i \leq n$, n funções de perturbação $V_{ij} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, totalizando então n^2 possíveis funções de perturbação. Consideraremos apenas o caso em que cada V_{ij} é um operador linear em \mathbb{R}^m , os quais podem ou não ter uma dependência temporal, porém a análise é a mesma, e sem perder a generalidade, representamos tais perturbações na forma matricial. Considere ainda o modelo de rede (6.2) o qual será escrito na forma do modelo de

perturbação considerado como

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \alpha \sum_{j=1}^n A_{ij} H(x_j - x_i) + \sum_{j=1}^n A_{ij} V_{ij}(x_j - x_i) \quad (6.9)$$

$$= f(x_i) + \sum_{j=1}^n A_{ij} (\alpha H + V_{ij})(x_j - x_i) \quad (6.10)$$

ou ainda, sabendo que $L_{ij} = \delta_{ij} g_i - A_{ij}$ tem-se

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} g_i - L_{ij})(\alpha H + V_{ij})(x_j - x_i) \quad (6.11)$$

$$= f(x_i) - \sum_{j=1}^n L_{ij} (\alpha H + V_{ij})(x_j - x_i). \quad (6.12)$$

E na forma de blocos, a equação (6.12) é escrita como

$$\dot{X} = F(X) - \alpha(L \otimes H)X + \left[\sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij} \right] X, \quad (6.13)$$

onde $D_{ij} \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é uma matriz cuja ij -ésima entrada é igual a 1 e todas as demais são iguais 0 (zero), $A_i \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é a matriz diagonal tal que a i -ésima entrada da diagonal é igual a 1 e todas as demais são nulas, $L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é o laplaciano da rede e $I_n \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é a matriz identidade. Maiores detalhes de como a equação (6.13) é obtida estão disponíveis no Apêndice A.2.

Temos então o

Teorema 18 (da Persistência da Sincronização). *Considere o modelo de acoplamento difusivo (6.2) o qual é reescrito na forma de perturbação (6.10) e escrito na forma de blocos como descrito em (6.13). Considere que $\alpha > \alpha_c$ (6.8). Então a variedade de sincronização é persistente se*

$$\sup_t \sum_{i,j=1:i \sim j}^n \|V_{ij}\|_\infty < \frac{\eta}{2\|L\|_\infty} \quad (6.14)$$

onde $\eta = \alpha \lambda_2 \mu_1 - \beta$, e m é a dimensão do sistema isolado (6.10).

A notação $i \sim j$, significa dizer que o vértice i da rede é vizinho do vértice j , ou então que o oscilador i está acoplado com o oscilador j . Antes de enunciar o teorema falamos que é possível introduzir ao total n^2 funções lineares de perturbação, porém na prática, algumas delas, ou muitas delas, não produzirão qualquer influência na estabilidade da variedade de sincronização. Precisamente, como consideramos que o modelo de perturbação age na função de acoplamento entre os osciladores, então só deverá existir perturbação para aqueles osciladores que estão acoplados.

O principal ingrediente da prova, que estará disponível na Seção 8.3 do Capítulo 8, é a utilização do Teorema 10. Além disso, a prova de referido teorema segue praticamente os mesmos passos da prova do Teorema 17. Ou seja, utilizamos novamente a teoria de equações diferenciais lineares não-autônomas abordada no Capítulo 4. O critério sobre a magnitude das perturbações é dado então principalmente pelo Teorema 10 e secundariamente pelo Teorema 11. O Teorema da persistência da sincronização poderia até mesmo ser enunciado de uma forma mais generalizada, isto é, generalizada no que se refere à utilização de uma norma induzida arbitrária substituindo (6.14) por uma desigualdade geral, porém se assim o fosse, o seu enunciado envolveria sucessivos e dependentes parâmetros os quais aparecem na demonstração do Teorema 17, portanto preferimos enunciar o Teorema 18 utilizando apenas a norma infinito.

Uma das coisas interessantes que a cota (6.14) nos diz é que podemos comparar a “robustez” de diferentes redes, isso porque tal cota é dependente e inversamente proporcional a norma infinito da

matriz laplaciana da rede. Então, por exemplo, é de se esperar que redes complexas aleatórias sejam mais “robustas” do que redes complexas *scale-free*, pois notoriamente, tem-se que $\|L\|_\infty = 2 \max_i g_i$ onde g_i é o grau do vértice i da rede. E como, as redes tipo *scale-free* tem uma grande quantidade de heterogeneidade, ao contrário das redes aleatórias, é de se esperar que essa última seja mais resistente à perturbações lineares. Portanto, pelo Teorema 18, podemos comparar a robustez de diferente tipos de redes olhando apenas para as suas topologias. De uma forma mais geral, note que $\eta = \eta(\lambda_2)$ e que, considerando redes suficientemente grandes, $\lambda_2 \approx g_1$ (Teorema 14, onde g_1 é o menor grau da rede, tornando o lado direito da desigualdade (6.14) proporcional à g_1/g_n e portanto, para redes *scale-free* muito grandes qualquer pequena perturbação poderia destruir a estabilidade da variedade de sincronização.

Queremos enfatizar que a condição (6.14) dada pelo Teorema 18 é apenas uma condição necessária, isto é, a mesma não garante que a estabilidade da variedade de sincronização não seja resistente a perturbações com magnitudes fora da cota estabelecida. Uma pergunta interessante, a qual não iremos tratar nesta dissertação, é: Qual conjunto de perturbações o qual o resultado apresentado é justo? Ou seja, quais seriam as perturbações tais que, tendo valores de magnitude fora do estabelecido em (6.14), destroem a estabilidade da variedade de sincronização?

Capítulo 7

Ilustrações

Este capítulo aborda o caso de rede $n = 2$ que é o exemplo mais trivial de rede. Apesar de ser o exemplo mais simplório, será possível extrair a essência dos Teoremas 17 e 18.

O objetivo então é transformar o problema de estudar a sincronização entre osciladores difusivamente acoplados num problema de estudar a estabilidade da solução trivial de uma equação diferencial linear não-autônoma. Sobre cada oscilador, introduzimos uma cópia da equação (3.1). Dessa maneira, todas as variáveis do sistema podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1) + \alpha[H(x_2) - H(x_1)] \\ \dot{x}_2 &= f(x_2) + \alpha[H(x_1) - H(x_2)]\end{aligned}\tag{7.1}$$

onde α é o parâmetro global de acoplamento.

7.1 Equação Variacional

Diferentemente da abordagem feita na prova do Teorema 17, utilizaremos o vetor diferença $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ para estudar a estabilidade da variedade de sincronização, porém, o resultado é o mesmo descrito pelo Teorema em questão para $n = 2$. Utilizando o teorema da existência global das soluções (17) garantimos que as soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de (7.1) existem sempre e são limitadas valendo-se das hipóteses do referido teorema. Sabendo que as soluções existem globalmente, o interesse foca-se na determinação do valor do parâmetro de acoplamento α , tal que a diferença de estados, ou seja, $x_1(t) - x_2(t)$, converge ao vetor nulo. Iremos omitir a dependência temporal das variável por uma questão de conforto na notação. Derivando, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ &= f(x_1) + \alpha[H(x_2) - H(x_1)] - f(x_2) - \alpha[H(x_1) - H(x_2)] \\ &= f(x_1) - f(x_2) - 2\alpha H(z).\end{aligned}$$

Como por hipótese, devemos ter que $\|z(0)\| \ll 1$, podemos realizar a linearização de $f(x_1) = f(x_2 + z)$, baseando-se na expansão em série de Taylor ficando com

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f(x_2 + z) - f(x_2) - 2\alpha H(z) \\ &= Df(x_2)z - 2\alpha H(z) + r(z)\end{aligned}$$

onde $Df(x_2)$ é a matriz jacobiana de f em x_2 . Assim, como por hipótese f é de classe C^r , $r \geq 2$, utilizamos o Princípio da Linearização (Proposição 3), pois é possível garantir, pelo Teorema da Taylor com Resto de Lagrange [Apo62] que $r(z) = \mathcal{O}(\|z\|^2)$, de forma que o resto de Taylor não destrói a estabilidade da solução trivial da equação variacional

$$\dot{z} = [Df(x_2) - 2\alpha H]z.\tag{7.2}$$

7.2 Parâmetros Críticos de Acoplamento

Vamos utilizar a Equação (7.2) para estudar a estabilidade da solução trivial $z(t) = \mathbf{0}$, à qual representa a variedade de sincronização. Consideraremos a partir deste momento, e por todo o restante deste capítulo, que $H = I_m$.

Queremos estabelecer condições sobre α para que o operador de evolução da Equação (7.2) tenha contração uniforme e consequentemente a sua solução trivial seja uniformemente assintoticamente estável. Podemos assim, utilizar um dos critérios para as contrações uniformes abordados. De maneira mais específica, vamos utilizar o Teorema da diagonal dominante (11). Portanto, devemos ter que

$$Df(x_2)_{ii} - 2\alpha + \sum_{j=1, j \neq i}^m |Df(x_2)_{ij}| < 0$$

ou

$$\alpha > \frac{1}{2} \left[Df(x_2)_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^m |Df(x_2)_{ij}| \right] < \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^m |Df(x_2)_{ij}| \right]$$

ou ainda, de forma superestimada, e considerando-se que as condições iniciais estão em uma vizinhança de um domínio absorvente Ω para a dinâmica f , tomamos

$$\alpha > \frac{1}{2} \sup_{\substack{x \in \Omega \\ 1 \leq i \leq m}} \left[\sum_{j=1}^m |Df(x)_{ij}| \right]$$

e portanto, escrevemos

$$\alpha_c = \beta/2 \tag{7.3}$$

onde

$$\beta = \sup_{x \in \Omega} \|Df(x)\|_\infty, \tag{7.4}$$

de forma que o conjunto Ω é advindo da existência da função de Lyapunov para a dinâmica isolada dos osciladores. Como Ω é um conjunto compacto, pelo teorema de Weierstrass (Teorema 7) segue que β sempre existe. Note que devido as superestimações sobre o valor de α , devemos esperar que a cota para o α_c que conseguimos seja bem maior do que a realmente necessária para garantir a sincronização entre os osciladores.

Dessa forma, podemos enunciar o resultado, o qual é um caso particular do Teorema 17:

Teorema 19. *Considere o modelo de rede (7.1) com $H = I_m$. Assuma que a dinâmica isolada tem uma função de Lyapunov com um domínio absorvente Ω . Além disso, assuma que as condições iniciais estão em uma vizinhança de Ω e considere*

$$\beta = \sup_{x \in \Omega} \|Df(x)\|_\infty.$$

Seja $\alpha_c = \beta/2$. Então se $\alpha > \alpha_c$ a variedade de sincronização é uniformemente assintoticamente estável.

Foram feitas simulações computacionais utilizando a dinâmica de Lorenz como a dinâmica isolada dos osciladores. Sabemos que a dinâmica de Lorenz é uma dinâmica caótica, então considerando o sistema desacoplado e com condições iniciais distintas, o mesmo não irá sincronizar. Apenas com base na intensidade do parâmetro global de acoplamento α , poderemos esperar que a variedade de sincronização seja estável. Além disso, como tratado na Subseção 3.1.2, o sistema de Lorenz admite uma função de Lyapunov. Dessa forma, tal dinâmica cumpre as hipóteses do Teorema 19, considerando as condições iniciais sempre numa vizinhança de Ω , neste caso como definido em (3.7).

Considere o Teorema 19. De posse das principais ferramentas, vamos encontrar o α_c para os

dois osciladores acoplados. Sendo $\mathbf{x} = (x, y, z)$, a matriz jacobiana do sistema de Lorenz é

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

e sua norma infinito é dada por $\|Df(\mathbf{x})\|_\infty = \max\{2\sigma, |r - z| + 1 + |x|, |y| + |x| + b\}$, de forma que queremos calcular $\beta = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \|Df(\mathbf{x})\|_\infty$.

As trajetórias encontram-se dentro do domínio absorvente Ω (3.7) que por sua vez é uma região limitada por um elipsoide, então o valor máximo atingido por x acontece quando $y = 0$ e $z = 2r$, da mesma forma y é máximo quando $x = 0$ e $z = 2r$ e z é máximo quando $x = y = 0$. Assim, podemos tomar as seguintes cotas:

$$|x| \leq \frac{b\sqrt{r}}{\sqrt{b-1}}, \quad |y| \leq \frac{rb}{\sqrt{\sigma(b-1)}} \quad \text{e} \quad |z - 2r| \leq \frac{rb}{\sqrt{\sigma(b-1)}}.$$

Mas com relação a z queremos estimar $|r - z| = |z - r|$. Usamos então a desigualdade triangular inversa, assim

$$\frac{rb}{\sqrt{\sigma(b-1)}} \geq |z - 2r| = |(z - r) - r| \geq ||z - r| - r|$$

então

$$||z - r| - r| \leq \frac{rb}{\sqrt{\sigma(b-1)}}$$

e portanto

$$r - \frac{rb}{\sqrt{\sigma(b-1)}} \leq |z - r| \leq \frac{rb}{\sqrt{\sigma(b-1)}} + r.$$

Assim,

$$\beta = \max \left\{ 2\sigma, \frac{rb}{\sqrt{\sigma(b-1)}} + r + 1 + \frac{b\sqrt{r}}{\sqrt{b-1}}, \frac{b\sqrt{r}}{\sqrt{b-1}} + \frac{rb}{\sqrt{\sigma(b-1)}} + b \right\}.$$

Então, substituindo os valores clássicos dos parâmetros do modelo de Lorenz, ou seja, $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = 8/3$ obtemos

$$\beta = \frac{rb}{\sqrt{\sigma(b-1)}} + r + 1 + \frac{b\sqrt{r}}{\sqrt{b-1}} \approx 58.22.$$

Portanto, o parâmetro crítico de acoplamento é

$$\alpha_c = \frac{\beta}{2} \approx 29.11.$$

A Figura 7.1 mostra a existência da variedade de sincronização considerando $\alpha > \alpha_c$.

Novamente, devido as superestimações para se obter o α_c , é de se esperar que o real parâmetro crítico para se observar sincronização entre os osciladores seja bem menor do que 29.11 no caso do sistema de Lorenz considerando os parâmetros usuais. A Figura 7.3 traz um resultado da simulação de $\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|_2$ em função de α . Valores de $\alpha > 0.5$ produzem $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|_2 = 0$.

7.2.1 Utilizando o Critério da Parte Simétrica

Considere o sistema (7.2). Seja $M(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x}) - 2\alpha I_3$. Fazendo uso do Teorema da Parte Simétrica (12), queremos estabelecer condições sobre α tal que a parte simétrica de $M(\mathbf{x})$ seja negativa-definida com $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$, para tanto, consideraremos também o Corolário 3. A parte

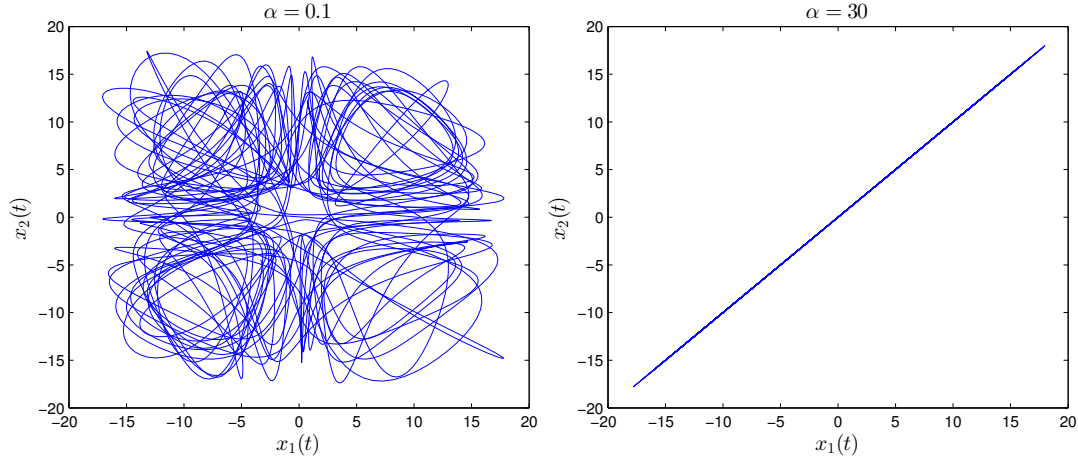


Figura 7.1: Gráficos de $x_1(t) \times x_2(t)$ com $0 \leq t \leq 100$ onde $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são respectivamente as primeiras componentes das trajetórias de $\mathbf{x}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ e $\mathbf{x}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ no modelo de dois osciladores acoplados com dinâmica de Lorenz. Do lado esquerdo com parâmetro de acoplamento igual a 0.1 e do lado direito com 30.

simétrica de $M(\mathbf{x})$, aqui denotada por $P_s(M(\mathbf{x}))$, se lê

$$P_s(M(\mathbf{x})) = \frac{Df(\mathbf{x}) + Df(\mathbf{x})^\dagger}{2} - 2\alpha I_3. \quad (7.5)$$

De forma explícita, temos

$$P_s(M(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} -\sigma - 2\alpha & (r + \sigma - z)/2 & y/2 \\ (r + \sigma - z)/2 & -1 - 2\alpha & 0 \\ y/2 & 0 & -b - 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Vamos requer que os autovalores de $P_s(M(\mathbf{x}))$ sejam todos negativos. Note que $P_s(M(\mathbf{x}))$ depende ainda de y e z , o que significa que o α_c é o maior α tal que os autovalores de $P_s(M(\mathbf{x}))$ sejam todos negativos com $\mathbf{x} \in \Omega$. Mas, de posse das cotas $|y| \leq rb/\sqrt{\sigma(b-1)}$ e $|z - 2r| \leq br/\sqrt{\sigma(b-1)}$, para cada $-rb/\sqrt{\sigma(b-1)} \leq y \leq rb/\sqrt{\sigma(b-1)}$ fixado, variamos $2r - br/\sqrt{\sigma(b-1)} \leq z \leq 2r + br/\sqrt{\sigma(b-1)}$ e a medida que fazemos essa variação, verificamos quais valores de α produzem $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < 0$.

Foram feitas simulações computacionais para o procedimento indicado acima resultando, com precisão de uma casa decimal, tem-se seguinte parâmetro crítico de acoplamento:

$$\alpha_c = 13.03. \quad (7.6)$$

Agora, utilizando o item 3 do Corolário 3 vamos impor que os determinantes dos menores principais de $P_s(M(\mathbf{x}))$ alternam os sinais começando com $\det(P_s(M(\mathbf{x})))_1 < 0$, onde indicamos por $P_h(M(\mathbf{x}))_1$, $P_h(M(\mathbf{x}))_2$ e $P_h(M(\mathbf{x}))_3$ os respectivos menores principais de ordem 1, 2 e 3. A ideia é que para cada determinante devemos tomar o maior α do polinômio resultante tal que esse polinômio produza valores positivos ou valores negativos dependendo da ordem do menor principal. E em seguida, tomamos o maior valor de α dentre os obtidos na etapa anterior, então esse será o nosso α_c para este caso.

Fazendo os cálculos temos

$$\det(P_s(M(\mathbf{x})))_1 = -\sigma - 2\alpha < 0$$

o que implica $\alpha > -\sigma/2$, o que é irrelevante para a análise pois estamos considerando apenas valores

positivos. Para o segundo determinante temos

$$\det(P_s(M(\mathbf{x}))_2) = (-\sigma - 2\alpha)(1 - 2\alpha) - \frac{(r + \sigma - z)^2}{4} > 0.$$

Para facilitar a notação faça $p_2(\alpha) = \det(P_s(M(\mathbf{x}))_2)$. Então

$$\begin{aligned} p_2(\alpha) &= (-\sigma - 2\alpha)(1 - 2\alpha) - \frac{(r + \sigma - z)^2}{4} \\ &= 4\alpha^2 + 2(\sigma + 1)\alpha + \sigma - 1/4(r + s - z)^2 \end{aligned}$$

Note que $p_2(\alpha)$ depende ainda de z . Então o procedimento é o seguinte: verificamos quais as raízes de $p_2(\alpha)$ com $\mathbf{x} \in \Omega$ ((3.7)) e tomamos a maior dentre todas as raízes positivas. Isso porque o coeficiente de α^2 em $p_2(\alpha)$ é positivo indicando que $p_2(\alpha) > 0$ quando α assume valores entre $(-\infty, \alpha_i) \cup (\alpha_j, +\infty)$, considerando que α_i e α_j são as raízes de $p_2(\alpha)$ e $\alpha_i < \alpha_j$. Note ainda que $p_2(\alpha)$ não possui raízes complexas. Simulações computacionais sugerem que $\alpha > 6.5972$ produz $p_2(\alpha) > 0$ com $\mathbf{x} \in \Omega$. De forma mais específica, notamos que a maior raiz de $p_2(\alpha)$ é dada por

$$\alpha_j = \frac{-2(\sigma + 1) + 2\sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma + (r + \sigma - z)^2}}{8},$$

onde α_j atinge o seu valor máximo quando $(r + \sigma - z)^2$ é máximo, implicado que esse valor máximo é atingido em $z = 2r + rb/\sqrt{\sigma(b-1)}$. Substituindo os valores de σ , b e r temos

$$\alpha_j \approx 6.5972.$$

Por fim, calculando os valores de α que produzem $p_3(\alpha) = \det(P_h(M(\mathbf{x}))_3) < 0$ temos

$$p_3(\alpha) = -8\alpha^3 + [-4b - 4(\sigma + 1)]\alpha^2 + \left[-2\sigma - 2b(\sigma + 1) + \frac{(r + \sigma - z)^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right] \alpha - \sigma b + \frac{b}{4}(r + \sigma - z)^2 + \frac{y^2}{4}. \quad (7.7)$$

É possível verificar que para todo y e z as raízes de $p_3(\alpha)$ não assumem valores complexos. Descartamos as raízes negativas e dentre as positivas verificamos quais produzem $p_3(\alpha) < 0$ para cada y e z , e dentre essas tomamos a maior. As simulações computacionais produzem o valor $\alpha > 7.5546$, e além disso, que tal valor é atingido quando $z = 2r + rb/\sqrt{\sigma(b-1)}$ e $y = -rb/\sqrt{\sigma(b-1)}$. Assim, podemos tomar então

$$\alpha_c = 7.5546 \quad (7.8)$$

que é o maior α que produz todos as desigualdades relacionadas aos menores principais.

Portanto, temos dois novos parâmetros críticos de acoplamento que são um pouco melhores do que aquele apresentado na seção anterior. Porém, a vantagem de utilizar o Teorema da diagonal dominante para encontrar o parâmetro crítico de acoplamento é que a mesma análise pode ser estendida para redes em geral como pode-se ver na prova do Teorema 17 exibida no Capítulo 8.

Podemos observar alguns resultados das simulações, os quais são apresentados nas figuras a seguir. Para $\alpha = 0.1$ verificamos que não há sincronização entre os osciladores como mostra a figura 7.2. Em contraste, para $\alpha = 30$ verificamos o decaimento exponencial em t . De forma um pouco mais precisa temos a relação entre o parâmetro de acoplamento α e a norma euclidiana da diferença dos estados $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$ como mostra a figura 7.3

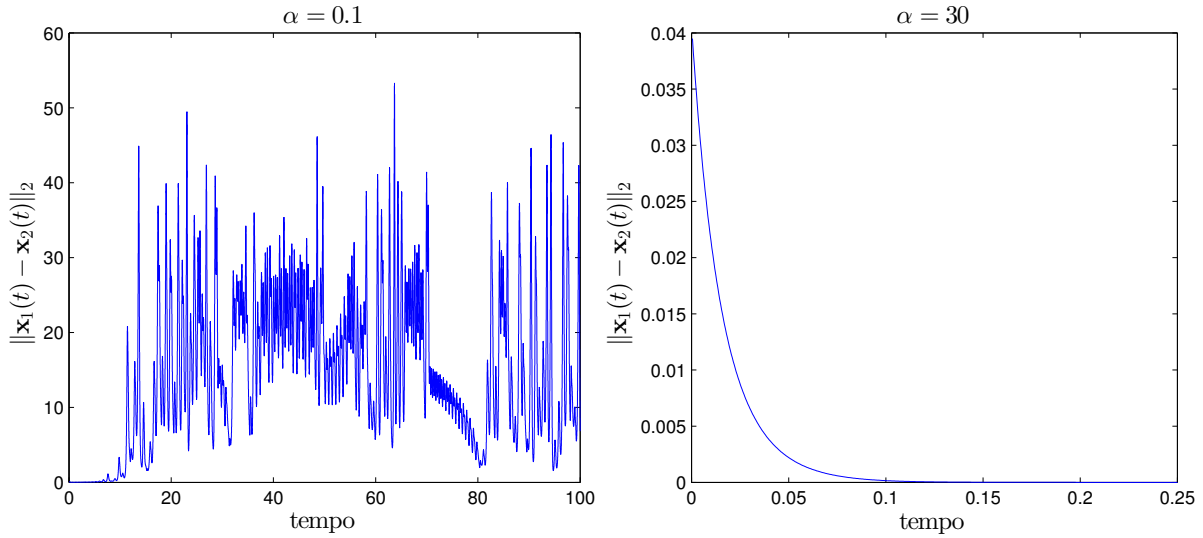


Figura 7.2: Do lado esquerdo temos a norma euclidiana da diferença de estados das trajetórias dos osciladores em função do tempo para $\alpha = 0.1$ e do lado direito para $\alpha = 30$.

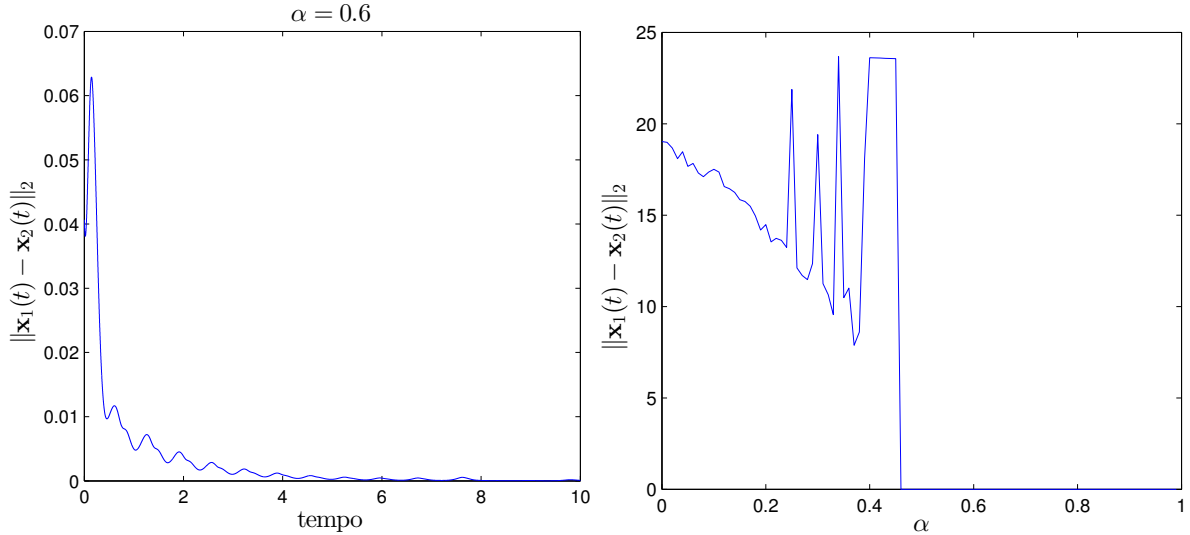


Figura 7.3: Do lado esquerdo temos agora $\alpha = 0.6$. Verificamos que o decaimento é mais lento porém o sistema tende à sincronização. Do lado direito temos a relação entre a norma euclidiana da diferença dos estados contra o parâmetro global de acoplamento. Neste caso, estamos tomando a média temporal da norma euclidiana com $1000 \leq t \leq 2000$ para cada α . Notoriamente, para valores $\alpha > 0.5$ o sistema irá sincronizar.

7.3 Perturbações em Dois Osciladores Acoplados

Da mesma forma que sabemos que o parâmetro crítico de acoplamento pode ser muitas vezes maior do que o realmente necessário para se obter sincronização persistente, a magnitude das perturbações poderia exceder as cotas estabelecidas pelo Teorema 18 e ainda assim a equação perturbada continuar na vizinhança de atração da variedade de sincronização.

Nesta seção vamos trabalhar com alguns exemplos para o Teorema 18 considerando $n = 2$, $H = I_m$ e o sistema isolado com a dinâmica de Lorenz. Assim, como $\|L\|_\infty = \|L\|_2 = 2$ e $m = 3$, então o valor estabelecido em (6.14) se resume a

$$\sup_t \sum_{i,j=1; i \sim j}^2 \|V_{ij}\|_\infty < \frac{\eta}{4}$$

Exemplo 4. Considere o Teorema 18 para $n = 2$, $H = I_3$, a dinâmica isolada sendo o sistema de Lorenz e as matrizes de perturbação $V_{11} = V_{22} = V_{21} = \mathbf{0} \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 3)$ e V_{12} a matriz constante

$$V_{12} = \begin{pmatrix} \xi & 0 & -\xi \\ 0 & -\xi & 0 \\ -\xi & 0 & \xi \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos tomar $\alpha = 30$. Já sabemos que, para o caso que estamos considerando, temos $\beta = 58.22$, de forma que tomamos $\alpha = 30 > \alpha_c = \beta/2$, produzindo assim $\eta = 30 - 29.11 = 0.89$. Então tem-se

$$\sup_t \sum_{i,j=1; i \sim j}^2 \|V_{ij}\|_\infty = \|V_{12}\|_\infty = 2|\xi|,$$

que deve satisfazer $2|\xi| < \eta/4 = 0.2225$, implicando que $-0.11125 < \xi < 0.11125$. Porém, simulações computacionais mostram que para esta faixa de intervalo, a variedade de sincronização existe para $\alpha > 0.6$ como pode ser observado na Figura 7.4, portanto e certamente para $\alpha = 30$. Tal figura tem como objetivo verificar regiões de sincronização de forma que podemos fazer essa análise através de um mapa de cores. Por padrão, a região em preto, no mapa, é a região que verificamos a propriedades citada. As cores no mapa representam a magnitude da média temporal de $\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|_2$ com t entre 1000 e 2000 para cada α e ξ , onde $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são as duas trajetórias para o sistema de Lorenz, de forma que essa variação acontece continuamente a partir de 0 (preto) até o valor máximo atingido pela norma euclidiana da diferença de estados (amarelo).

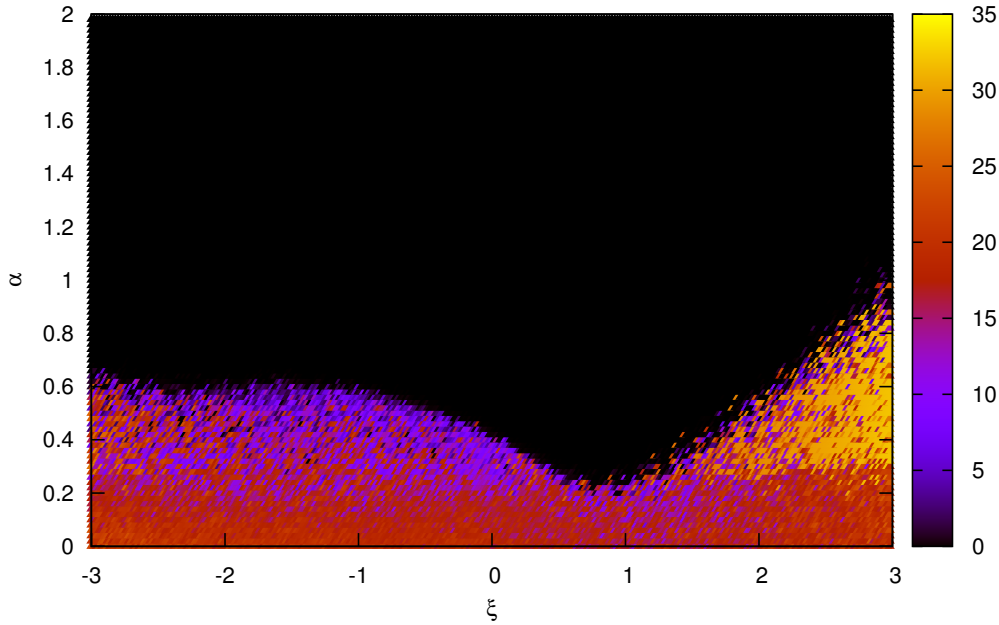


Figura 7.4: Mapa de cores para o Exemplo 4. A escala de cores representa $\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|_2$.

Lema 4. Sejam $A(t)$ e $B(t)$ funções matriciais contínuas em um intervalo $J \subset \mathbb{R}_+$ tais que $\|A(t)\| \leq M$, $\|B(t)\| \leq M$, e suponha que o operador de evolução da equação $\dot{x} = A(t)x$ cumpra $\|T(t, s)\| \leq ke^{\eta(t-s)}$, $\eta < 0$ e $k \geq 1$. Se

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} B(t) dt \right\| \leq \delta \quad \text{para} \quad |t_1 - t_2| \leq h,$$

então o operador de evolução da equação perturbada $\dot{y} = [A(t) + B(t)]y$ cumpre

$$\|\tilde{T}(t, s)\| \leq (1 + \delta)ke^{\beta(t-s)}$$

onde $\beta = \eta + 3Mk\delta + h^{-1} \ln(1 + \delta)k$.

Este resultado, cuja prova pode ser encontrada em [Cop78] página 7, mostra que se os coeficientes das matrizes $A(t)$ e $B(t)$ são limitados, então a estabilidade uniformemente assintótica é preservada sobre perturbações “integralmente pequenas”. Uma aplicação então que pode ser observada é que a estabilidade uniformemente assintótica não é destruída sobre perturbações que oscilam suficientemente rápido.

Exemplo 5. Considere agora as mesmas hipóteses feitas no Exemplo 4 com uma única diferença, ou seja, considere agora a matriz de perturbação não-constante

$$V_{12} = \begin{pmatrix} \xi \cos(\omega t) & \xi \cos(\omega t) & \xi \cos(\omega t) \\ \xi \cos(\omega t) & 0 & 0 \\ \xi \cos(\omega t) & 0 & 0 \end{pmatrix} = \xi \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde a princípio tomamos ω sendo a frequência de oscilação do sistema de Lorenz para os parâmetros usuais $\sigma = 10$, $r = 29$ e $b = 8/3$. Verifica-se, através dos dados obtidos pelas simulações que a frequência dominante é aproximadamente $\omega = 4.1888$.

Pelo Teorema 18, para que a magnitude da perturbação não altere a estabilidade da variedade de sincronização, faz-se necessário que

$$\sup_t \sum_{i,j=1; i \sim j}^2 \|V_{ij}\|_\infty = \sup_t \|V_{12}\|_\infty < \frac{\eta}{4}.$$

Então, como $\sup_t \|V_{12}\|_\infty = \sup_t 3|\xi| |\cos(\omega t)| = 3|\xi|$, teremos que $-7.42 \times 10^{-2} < \xi < 7.42 \times 10^{-2}$. Plotamos, na Figura 7.5, valores um pouco mais realísticos para ξ e α , produzindo novamente regiões de sincronização (em preto).

É perceptível a simetria que encontramos. Tal simetria está relacionada com a dependência temporal em função do cosseno. Além disso, a inclinação da “língua” que observamos está intimamente relacionada com o parâmetro ω .

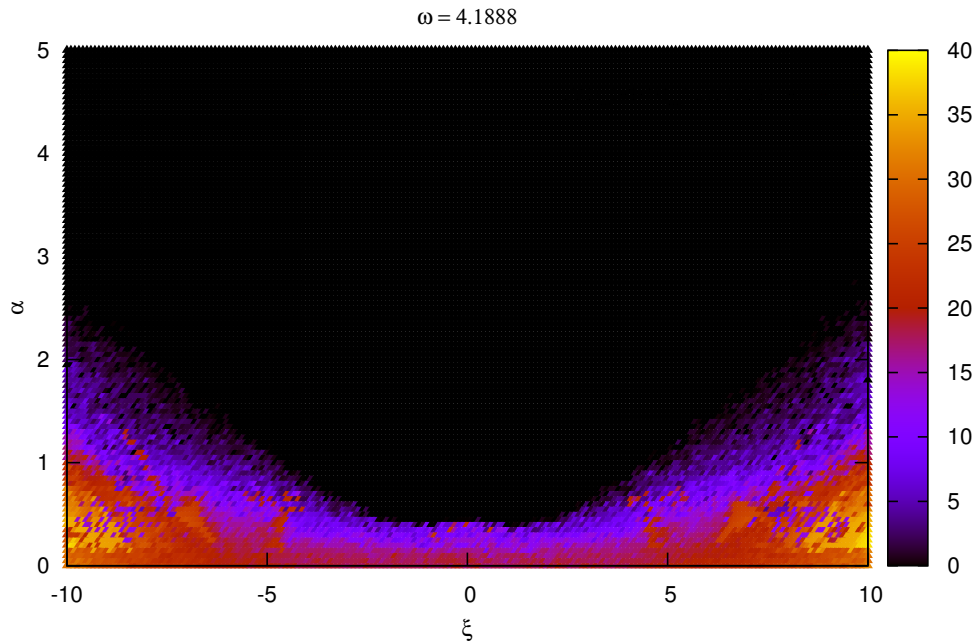


Figura 7.5: Mapa de cores para o Exemplo 5 com $\omega = 4.1888$.

Simulações computacionais mostram que os mapas de cores para baixas frequências são bastante oscilatórios e não simétricos, de forma que não é possível verificar inclinação neste caso. Portanto,

se ω é pequeno, isto é, se $\omega \approx 0$, então isto equivale a ter uma perturbação V_{12} com a matriz constante

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de fato pois $\lim_{\omega \rightarrow 0} \cos(\omega t) = 1$. Iremos considerar então apenas valores “grandes” para ω e apenas valores não-negativos visto que a análise seria recíproca pois o cosseno é uma função par.

A pergunta interessante é: o que acontece então quando $\omega \rightarrow \infty$? E a resposta é: isso equivale a não ter perturbação, ou seja, tornando $V_{12} = \mathbf{0}$. Esta conclusão pode ser verificada pelo Lema 4. Note que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\| \int V_{12}(t) dt \right\|_{\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 3|\xi| \int |\cos(\omega t)| dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega t) \operatorname{sgn}(\omega t)}{\omega} = 0$$

onde “sgn” é a função sinal. Intuitivamente, quando ω cresce, a perturbação tende a ter uma oscilação muito rápida, fazendo com que a estabilidade da variedade de sincronização, definida por $x_1(t) = x_2(t)$, não seja afetada - de acordo com o Lema 4.

Além disso, sabemos que para o modelo de dois osciladores acoplados com dinâmica de Lorenz e sem perturbação, o real parâmetro de acoplamento que se observa sincronização é aproximadamente 0.5. Então, a medida que aumenta-se o valor de ω no modelo de perturbação considerado neste exemplo, menor será a inclinação da “língua” no mapa de cores, e portanto quando $\omega \rightarrow \infty$ restará apenas regiões de não-sincronização abaixo de valores menores que 0.5 para α . Este fato pode ser observado na Figura 7.6.

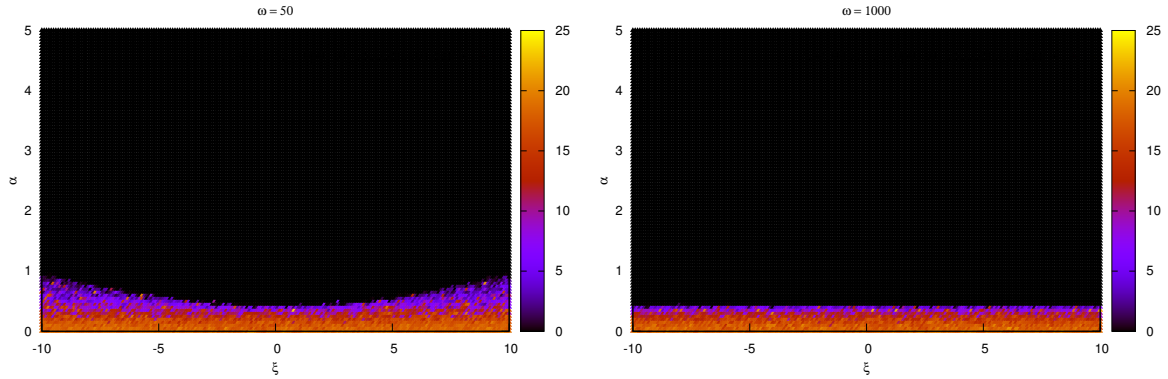


Figura 7.6: Mapas de cores para diferentes valores de ω , relativo ao Exemplo 5.

Dessa forma, possuindo dependência em t ou não, nota-se que a variedade de sincronização é “bastante” persistente, isso devido a força (magnitude) do parâmetro global de acoplamento α , visto que o α_c é bem maior do que o real α_c para se observar ao menos a sincronização. Então seguindo os mesmos passos é de se esperar que a região de estabilidade uniformemente assintótica pode ser maior do que aquela que podemos garantir.

Capítulo 8

Prova dos Teoremas Fundamentais

8.1 Existência Global das Soluções

Iremos construir uma função de Lyapunov para a dinâmica coletiva de redes de n osciladores difusivamente acoplados, dada a hipótese de que a dinâmica individual possui uma função de Lyapunov. O resultado é o Teorema 16.

Prova: Omitiremos a dependência temporal de $x_i(t)$ para facilitar a notação.

Considere que a função $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V(x_i) = 1/2 \langle x_i - a, Q(x_i - a) \rangle \quad (8.1)$$

onde $a \in \mathbb{R}^m$ é fixado e Q é uma matriz positiva-definida, é uma função de Lyapunov para os sistemas isolados, $i = 1, \dots, n$ com um conjunto absorvente Ω . Considere então o sistema acoplado (6.3) que pode ser escrito na forma compacta

$$\dot{X} = F(X) - \alpha(L \otimes H)X = G(X) \quad (8.2)$$

onde $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $F(X) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$. Considere também a função $W : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}$ definida da forma

$$W(X) := \begin{cases} \sum_i V(x_i) & \forall i \text{ tal que } x_i \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega \end{cases} \quad (8.3)$$

Afirmção: W é função de Lyapunov para $G(X)$.

Por construção, W é positiva-definida em relação a Ω^{nm} . Portanto, resta-nos estudar o sinal da derivada de W . Temos 3 casos a analisar, porém antes de mais nada, note que considerando a dinâmica isolada

$$\begin{aligned} V'(x_i) &= 1/2 \langle dx_i/dt, Q(x_i - a) \rangle + 1/2 \langle x_i - a, Q dx_i/dt \rangle \\ &= 1/2 \langle f(x_i), Q(x_i - a) \rangle + 1/2 \langle x_i - a, Q f(x_i) \rangle = \langle f(x_i), Q(x_i - a) \rangle. \end{aligned}$$

E considerando a dinâmica coletiva tem-se que $V'(x_i) = \langle g_i(x_i), Q(x_i - a) \rangle$ onde $g_i(x_i) = f(x_i) - \alpha \sum_{j=1}^n L_{ij} H(x_j)$.

Caso 1: $x_i \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega$ para todo $i = 1, \dots, n$. Então, temos que

$$\begin{aligned} W'(X) &= \sum_{i=1}^n V'(x_i) = \sum_i \langle f(x_i) - \alpha \sum_j L_{ij} H(x_j), Q(x_i - a) \rangle \\ &= \sum_i \langle f(x_i), Q(x_i - a) \rangle - \alpha \sum_i \sum_j L_{ij} \langle H(x_j), Q x_i \rangle + \alpha \sum_i \sum_j L_{ij} \langle H(x_j), Q a \rangle \\ &= \sum_i \langle f(x_i), Q(x_i - a) \rangle - \alpha \sum_i \sum_j L_{ij} x_i^\dagger Q H x_j + \alpha \sum_i \sum_j L_{ij} a^\dagger Q H x_j, \end{aligned}$$

porém, note que podemos escrever estas duas últimas somas da forma

$$\sum_i \sum_j L_{ij} x_i^\dagger Q H x_j = X^\dagger (L \otimes Q H) X \quad \text{e} \quad \sum_i \sum_j L_{ij} a^\dagger Q H x_j = A^\dagger (L \otimes Q H) X$$

onde $A = \mathbf{1} \otimes a$. Assim,

$$\begin{aligned} A^\dagger (L \otimes Q H) X &= (\mathbf{1} \otimes a)^\dagger (L \otimes Q H) X \\ &= (\mathbf{1}^\dagger \otimes a^\dagger) (L \otimes Q H) X \\ &= (\mathbf{1}^\dagger L) \otimes (a^\dagger Q H) X, \end{aligned}$$

porém, $\mathbf{1}^\dagger L = L \mathbf{1} = \mathbf{0}$, logo $A^\dagger (L \otimes Q H) X = 0$. Ficando com

$$W'(X) = \sum_i \langle f(x_i), (x_i - a) \rangle - \alpha X^\dagger (L \otimes Q H) X.$$

Como L é positiva semi-definida e Q e H são positivas-definida então tem-se que $L \otimes Q H$ é positiva semi-definida (Teorema 5). E por hipótese $\sum_i \langle f(x_i), Q(x_i - a) \rangle < 0$ visto que $x_i \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega$ para todo i , portanto $W'(X) < 0$.

Caso 2: $x_i \in \Omega$ para todo i . Como Ω é um conjunto positivamente invariante, então não temos nada a fazer pois as trajetórias permanecem em Ω por todo o tempo futuro.

Caso 3: Vamos impor, sem perder a generalidade e para facilitar as manipulações algébricas, que $a = \mathbf{0}$. Considere inicialmente que $x_1 \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega$ e $x_2, \dots, x_n \in \Omega$. Assim,

$$\begin{aligned} W'(X) &= V'(x_1) = \langle f(x_1) - \alpha \sum_j L_{1j} H(x_j), Q x_1 \rangle \\ &= \langle f(x_1), Q x_1 \rangle - \alpha \left\langle \sum_j L_{1j} H(x_j), Q x_1 \right\rangle. \end{aligned}$$

Queremos mostrar nesse ponto que $\left\langle \sum_j L_{1j} H(x_j), Q x_1 \right\rangle \geq 0$. Perceba que

$$\left\langle \sum_j L_{1j} H(x_j), Q x_1 \right\rangle = x_1^\dagger \sum_j L_{1j} Q H x_j = X^\dagger (L \otimes Q H) X - \sum_{i=2}^n \sum_j L_{ij} x_i^\dagger Q H x_j.$$

Em outras palavras, queremos mostrar que cada parcela da soma $X^\dagger (L \otimes Q H) X$ é um número não-negativo começando com $i = 1$, de forma que o argumento utilizado pode ser generalizado. Então, sabendo que $L_{ij} = \delta_{ij} k_i - A_{ij}$ onde k_i é o grau do vértice i , temos

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_j L_{1j} H(x_j), Q x_1 \right\rangle &= \left\langle \sum_j (\delta_{1j} k_1 - A_{1j}) H(x_j), Q x_1 \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_j (\delta_{1j} k_1 H(x_j)), Q x_1 \right\rangle - \left\langle \sum_j A_{1j} H(x_j), Q x_1 \right\rangle \\ &= k_1 \langle H(x_1), Q x_1 \rangle - \left\langle \sum_j A_{1j} H(x_j), Q x_1 \right\rangle \\ &= \sum_{j \sim 1} (\langle H(x_1), Q x_1 \rangle - \langle H(x_j), Q x_1 \rangle) \geq 0 \end{aligned}$$

visto que para $j > 1$, $x_j \in \Omega$, então, utilizando a desigualdade de Schwarz [Lim10] é possível mostrar

que $\langle H(x_1), Qx_1 \rangle \geq \langle H(x_j), Qx_1 \rangle$ para todo $j = 1, \dots, n$. Assim, cada parcela da soma

$$X^\dagger(L \otimes QH)X = \sum_i \sum_j L_{ij} x_i^\dagger QHx_j$$

é um número positivo, pois basta considerar que o vetor $x_i \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega$ e $x_j \in \Omega$ para $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$. Então o argumento será o mesmo feito para x_1 . Sendo assim, podemos afirmar que para qualquer $1 \leq k \leq n$, sendo $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega$ e $x_{k+1}, \dots, x_n \in \Omega$ teremos que $W'(X) < 0$ pois

$$\begin{aligned} W'(X) &= \sum_{i=1}^k V'(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \langle f(x_i), Qx_i \rangle - \alpha \sum_{i=1}^k \sum_j L_{ij} x_i^\dagger QHx_j \end{aligned}$$

onde $\sum_{i=1}^k \sum_j L_{ij} x_i^\dagger QHx_j \geq 0$ e por hipótese, $\sum_{i=1}^k \langle f(x_i), Qx_i \rangle < 0$. ■

8.2 Sincronização Global em Redes

O resultado a ser mostrado é o Teorema 17. Antes porém considere o seguinte lema cuja prova está disponível no Apêndice B.3.

Lema 5. *Considere o sistema (3.1) onde $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^d , $d \geq 2$. Suponha que as trajetórias de (3.1) moram num domínio compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Então, o resto $R(s, u)$ de uma linearização de f , em torno de uma curva solução $s = s(t)$ de (3.1), cumpre*

$$\|R(s, u)\| \leq M\|u\|^2$$

onde $u \in \mathbb{R}^m$ é tal que $x = s + u$ está suficientemente próximo de s e M é uma constante uniforme em s .

Ainda antes de iniciar a prova, vamos considerar uma pequena observação sobre o espaço euclidiano \mathbb{R}^{nm} . Os espaços $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ e \mathbb{R}^{nm} são isomorfos e \mathbb{R}^{nm} pode ser decomposto em uma soma direta da forma

$$\mathbb{R}^{nm} = N \oplus T$$

com as projeções

$$\pi_N : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow N \quad \text{e} \quad \pi_T : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow T$$

onde $\pi_N + \pi_T = Id_{\mathbb{R}^{nm}}$. Os subespaços N e $T \subset \mathbb{R}^{nm}$ são determinados pelos mergulhos de \mathbb{R}^m e $\mathbb{R}^{(n-1)m}$ induzido pelo laplaciano L da rede. Isto é, tais subespaço são dados por

$$N = \{\mathbf{1}\} \otimes \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad T = \{v_2, \dots, v_n\} \otimes \mathbb{R}^m$$

onde $\{\mathbf{1}\}$ representada o subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelo vetor $\mathbf{1}$ e da mesma forma para $\{v_2, \dots, v_n\}$.

Prova (do Teorema 17): Queremos mostrar que a variedade de sincronização N (6.6) é localmente atratora. Vamos olhar para as equações do movimento $(x_i(t) \in \mathbb{R}^m)$ não separadamente, mas como um único vetor obtido do empilhamento $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^{nm}$, o que produz o modelo escrito na forma de blocos

$$\dot{X} = F(X) - \alpha(L \otimes H)X \tag{8.4}$$

com $F(X) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$, $L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é o laplaciano da rede. Para facilitar a notação e a análise omitiremos a dependência em t de $X(t)$.

Como L é simétrica, e por hipótese H também é simétrica, então essas matrizes são ortogonalmente diagonalizáveis (Corolário 1). Considere então a representação $L = OMO^\dagger$ e $H = PDP^\dagger$. Da mesma forma, $L \otimes H$ tem a decomposição $L \otimes H = (O \otimes P)(M \otimes D)(O \otimes P)^\dagger$. Então, pelo Teorema Espectral, como os autovetores de $L \otimes H$ formam uma base de \mathbb{R}^{nm} podemos representar o vetor X nessa base efetuando a seguinte mudança linear de coordenadas

$$X = (O \otimes P)Y,$$

onde $Y = (y_1, \dots, y_n), y_i \in \mathbb{R}^m$. Mas, de forma explícita pode-se verificar que

$$(O \otimes P)Y = \sum_{i=1}^n v_i \otimes Py_i,$$

onde os v_i 's são os autovetores de L . Estamos considerando que os autovetores de L , $v_1 = \mathbf{1}, v_2, \dots, v_n$, já estão ortonormalizados. Para facilitar a notação colocamos $s = Py_1$ e escrevemos então o vetor X na forma

$$X = \mathbf{1} \otimes s + \sum_{i=2}^n v_i \otimes Py_i = \mathbf{1} \otimes s + U \quad (8.5)$$

com $U = \sum_{i=2}^n v_i \otimes Py_i$.

Introduzimos neste momento a seguinte nomenclatura: chamamos o autovetor $\mathbf{1}$ de L de modo normal e os demais (v_2, \dots, v_n) de modos transversais. Queremos então obter condições para que as contribuições dos modos transversais convirjam ao vetor nulo de \mathbb{R}^{nm} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U = \mathbf{0}. \quad (8.6)$$

Isto é, a rede irá sincronizar globalmente pois neste caso tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} X = \mathbf{1} \otimes s$, o que significa

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = s(t).$$

Reescrevendo a equação (8.4) na nova representação (8.5) e sabendo que $(L \otimes H)(\mathbf{1} \otimes s) = (L\mathbf{1} \otimes Hs) = \mathbf{0}$ temos

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X) - \alpha(L \otimes H)X \\ \mathbf{1} \otimes \dot{s} + \dot{U} &= F(\mathbf{1} \otimes s + U) - \alpha(L \otimes H)(\mathbf{1} \otimes s + U) \\ &= F(\mathbf{1} \otimes s + U) - \alpha(L \otimes H)U. \end{aligned}$$

Neste ponto, nós assumimos que U é pequeno e realizamos a expansão em série de Taylor de $F(\mathbf{1} \otimes s + U)$ em torno de uma vizinhança da variedade de sincronização N , onde $\mathbf{1} \otimes s + U$ pertence a essa vizinhança, produzindo

$$F(\mathbf{1} \otimes s + U) = F(\mathbf{1} \otimes s) + DF(\mathbf{1} \otimes s)U + R(s, U).$$

Mas, não é difícil ver que $F(\mathbf{1} \otimes s) = \mathbf{1} \otimes f(s)$. Note ainda que $DF(X)$ é uma matriz diagonal em blocos onde cada bloco $1 \leq i \leq n$ é a matriz jacobiana $Df(x_i)$ o implica que podemos escrever

$$DF(\mathbf{1} \otimes s) = I_n \otimes Df(s).$$

Então, ficamos com

$$\mathbf{1} \otimes \dot{s} + \dot{U} = \mathbf{1} \otimes f(s) + [I_n \otimes Df(s)]U - \alpha(L \otimes H)U + R(s, U). \quad (8.7)$$

Considere o operador projeção nos modos normais $\pi_N = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^\dagger \otimes I_m$, e o seu complemento, o operador projeção nos modos transversais $\pi_T = Id_{\mathbb{R}^{nm}} - \pi_N$.

Assim, analisamos a equação (8.7) projetando-a nos modos normais e transversais. Aplicando o

operador π_N tem-se, de um lado $\pi_N(\mathbf{1} \otimes \dot{s}) + \pi_N(\dot{U}) = \mathbf{1} \otimes \dot{s}$. E do outro

$$\pi_N(\mathbf{1} \otimes f(s)) + \pi_N[I_n \otimes Df(s)]U - \alpha\pi_N(L \otimes H)U + \pi_N R(s, U) = \mathbf{1} \otimes f(s) + \pi_N R(s, U),$$

e portanto

$$\mathbf{1} \otimes \dot{s} = \mathbf{1} \otimes f(s) + \pi_N R(s, U). \quad (8.8)$$

Aplicando-se o operador π_T em (8.7) tem-se, de um lado

$$\pi_T(\mathbf{1} \otimes \dot{s}) + \pi_T(\dot{U}) = \dot{U}.$$

Do outro lado tem-se

$$\pi_T(\mathbf{1} \otimes f(s)) = \mathbf{0}, \quad \pi_T[I_n \otimes Df(s)]U = [I_n \otimes Df(s)]U \quad \text{e} \quad -\alpha\pi_T(L \otimes H)U = -\alpha(L \otimes H)U.$$

Assim ficamos com

$$\dot{U} = [I_n \otimes Df(s) - \alpha(L \otimes H)]U + \pi_T R(s, U). \quad (8.9)$$

A equação (8.9) é uma equação diferencial linear não-autônoma com perturbação. Então, como queremos conseguir condições para garantir que $U = \mathbf{0}$ seja uniformemente assintoticamente estável em (8.9), faremos o seguinte procedimento: Vamos considerar a respectiva equação homogênea, ou seja,

$$\dot{U} = [I_n \otimes Df(s) - \alpha(L \otimes H)]U, \quad (8.10)$$

obter uma cota para que o operador de evolução desta equação linear tenha contração uniforme e a partir de então, considerar a equação perturbada (8.9) e mostrar que a cota obtida na equação linear continua sendo válida mesmo sem desprezar o resto.

Reescrevendo U na base de $T = \{v_2, \dots, v_n\} \otimes \{w_1, \dots, w_n\}$, isto é, $U = \sum_{i=2}^n v_i \otimes Py_i$, onde os w_i 's são os autovetores ortonormalizados de H , ficamos com

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n v_i \otimes P\dot{y}_i &= [I_n \otimes Df(s) - \alpha(L \otimes H)] \sum_{i=2}^n v_i \otimes Py_i \\ &= \sum_{i=2}^n v_i \otimes [Df(s) - \alpha\lambda_i H]Py_i \end{aligned}$$

ou ainda

$$\sum_{i=2}^n v_i \otimes \{P\dot{y}_i - [Df(s) - \alpha\lambda_i H]Py_i\} = \mathbf{0}.$$

Como todos os autovetores v_i são linearmente independentes, segue que $P\dot{y}_i - [Df(s) - \alpha\lambda_i H]Py_i = \mathbf{0}$ para todo i , ou simplesmente

$$\dot{y}_j = [A(t) - \alpha\lambda_j D]y_j \quad (8.11)$$

com $j = 2, \dots, n$ e $A(t) = P^\dagger Df(s(t))P$. Portanto, reduzimos a análise à estudar as equações diferenciais dos coeficientes da mudança linear de coordenadas.

Todas as equações, em (8.11), tem a mesma estrutura diferenciado-se apenas pelo j -ésimo autovetor de L , λ_j . Procedemos então neste momento a mesma análise feita na Seção 7.2, utilizando o Teorema da diagonal dominante (11). Para que a solução trivial $y_j = \mathbf{0}$ de cada equação seja uniformemente assintoticamente estável devemos impor que

$$A_{ii}(t) - \alpha\lambda_j D_{ii} + \sum_{k=1, k \neq i}^m |A_{ik}(t)| < 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m \quad \text{e} \quad 2 \leq j \leq n$$

ou ainda

$$\alpha > \frac{A_{ii}(t) + \sum_{k=1, k \neq i}^m |A_{ik}(t)|}{\lambda_j D_{ii}} < \frac{\sum_{k=1}^m |A_{ik}(t)|}{\lambda_j D_{ii}}.$$

Como os autovalores de L podem ser ordenados da forma $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, e, por hipótese, H é positiva-definida, então os elementos da diagonal de D podem ser ordenados da forma $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m$, e as condições iniciais de todas as trajetórias estão numa vizinhança do domínio absorvente Ω , somos motivados a tomar o parâmetro crítico de acoplamento

$$\alpha_c = \frac{\sup_{x \in \Omega} \|P^\dagger Df(x)P\|_\infty}{\lambda_2 \mu_1}, \quad (8.12)$$

ou simplesmente $\alpha_c = \beta / \lambda_2 \mu_1$, onde $\beta = \sup_{x \in \Omega} \|P^\dagger Df(x)P\|_\infty$.

Portanto, tomando $\alpha > \alpha_c$, garantimos que os operadores de evolução $T_j(t, s)$ associados aos y_j 's de (8.11) possuem contração uniforme e portanto, o Teorema 11 assegura que

$$\begin{aligned} \|y_j(t)\| &\leq \|T_j(t, s)y(s)\| \\ &\leq \|T_j(t, s)\| \|y_j(s)\| \leq k_j e^{-\eta(t-s)} \|y_j(s)\|, \end{aligned}$$

onde $\eta = \alpha \lambda_2 \mu_1 - \beta$. Queremos então, conseguir condições para o operador de evolução $T(t, s)$ de $U(t)$ em (8.10) tenha contração uniforme, para tanto, vamos utilizar norma euclidiana, sem perder a generalidade, para estimar $U(t)$. Note que $\|U(t)\|_2^2 = \langle U(t), U(t) \rangle$ e que

$$\begin{aligned} \langle U(t), U(t) \rangle &= \left\langle \sum_{i=2}^n v_i \otimes P y_i(t), \sum_{j=2}^n v_j \otimes P y_j(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=2}^n v_i \otimes P T_i(t, s) y_i(s), \sum_{j=2}^n v_j \otimes P T_j(t, s) y_j(s) \right\rangle \\ &= \sum_i \sum_j v_j^\dagger v_i \otimes [y_j(s)^\dagger T_j^\dagger(t, s) P^\dagger] P T_i(t, s) y_i(s) \\ &= \sum_i v_i^\dagger v_i \otimes y_i(s)^\dagger T_i^\dagger(t, s) T_i(t, s) y_i(s) = \sum_{i=2}^n \|y_i(t)\|_2^2. \end{aligned}$$

De forma análoga, mostra-se que $\|U(s)\|_2^2 = \sum_{i=2}^n \|y_i(s)\|_2^2$.

Como $\|U(t)\|_2^2 = \sum_{i=2}^n \|y_i(t)\|_2^2$ e $\|y_i(t)\|_2^2 \leq k_i^2 e^{-2\eta(t-s)} \|y_i(s)\|_2^2$, onde os k_i 's são constantes que dependem apenas da dimensão do sistema isolado, então

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_2^2 &\leq \sum_{i=2}^n k_i^2 e^{-2\eta(t-s)} \|y_i(s)\|_2^2 \\ &\leq \left(\max_i k_i^2 \right) e^{-2\eta(t-s)} \sum_{i=2}^n \|y_i(s)\|_2^2 \\ &= \kappa^2 e^{-2\eta(t-s)} \|U(s)\|_2^2 \end{aligned}$$

onde $\kappa = \max_i k_i$. Note que $T(t, s)U(s) = U(t)$. Então $\|T(t, s)U(s)\|_2^2 \leq \kappa^2 e^{-2\eta(t-s)} \|U(s)\|_2^2$, ou ainda

$$\left\| T(t, s) \frac{U(s)}{\|U(s)\|_2^2} \right\|_2^2 \leq \kappa^2 e^{-2\eta(t-s)}.$$

Seguindo a definição de norma induzida temos que

$$\|T(t, s)\|_2^2 = \sup_{\|w\|_2^2 \leq 1} \left\| T(t, s) \frac{U(s)}{\|U(s)\|_2^2} \right\|_2^2 \leq \kappa^2 e^{-2\eta(t-s)}$$

onde $w = U(s) / \|U(s)\|_2^2$. Portanto, $\|T(t, s)\|_2 \leq \kappa e^{-\eta(t-s)}$.

Considere a equação (8.9) e sua respectiva equação homogênea (8.10), cujo operador de evolução

$T(t, s)$ satisfaz $\|T(t, s)\| \leq \kappa e^{-\eta(t-s)}$. Como o resto $R(s, U)$ cumpre $\|R(s, U)\| \leq M\|U\|^2$ em virtude do Lema 5, então as hipóteses da Proposição 3 são satisfeitas e portanto a estabilidade não muda, isto é, $U(t) = \mathbf{0}$ é uniformemente assintoticamente estável. Logo, garantimos que a variedade de sincronização é uniformemente assintoticamente estável. ■

8.3 Perturbações na Função de Acoplamento

Provamos o Teorema 18.

Porva: Considere o modelo de perturbação (6.10). Como os operadores de perturbação $V_{ij} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, são operadores lineares, consideramos, sem perder a generalidade, que para todo i e j , V_{ij} é uma matriz de dimensão m . Então, na forma de blocos o modelo (6.10) é escrito como

$$\dot{X} = F(X) - \alpha(L \otimes H)X + \left[\sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij} \right] X, \quad (8.13)$$

onde $X = (x_1, \dots, x_n)$, $F(X) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$, L é o laplaciano da rede, $B_i \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é uma matriz diagonal cuja i -ésima entrada da diagonal é igual a 1 e todas as demais entradas são 0 (zero) e $D_{ij} \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é uma matriz cuja ij -ésima entrada é igual a 1 e todas as demais são nulas.

Realizamos uma análise similar à feita na prova do Teorema 17, isto é, utilizamos a representação $X = \mathbf{1} \otimes s + U$ em (8.13) e analisamos a parte linear do campo de vetores F com a influência do resto de Taylor, de forma que procedemos a linearização de $F(\mathbf{1} \otimes s + U)$ em torno de $\mathbf{1} \otimes s$ considerando que $\mathbf{1} \otimes s + U$ pertence a uma vizinhança de $\mathbf{1} \otimes s$. Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \otimes \dot{s} + \dot{U} &= F(\mathbf{1} \otimes s) + DF(\mathbf{1} \otimes s)U - \alpha(L \otimes H)(\mathbf{1} \otimes s + U) + \\ &+ \left[\sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij} \right] (\mathbf{1} \otimes s + U) + R(s, U) \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{1} \otimes \dot{s} + \dot{U} = \mathbf{1} \otimes f(s) + [I_n \otimes Df(s)]U - \alpha(L \otimes H)U + \left[\sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij} \right] U + R(s, U). \quad (8.14)$$

visto que $F(\mathbf{1} \otimes s) = \mathbf{1} \otimes f(s)$, $DF(\mathbf{1} \otimes s) = I_n \otimes Df(s)$, $\alpha(L \otimes H)(\mathbf{1} \otimes s) = \alpha(L\mathbf{1} \otimes H(s)) = \mathbf{0}$ e

$$\left[\sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij} \right] (\mathbf{1} \otimes s) = \mathbf{0}$$

pois $(B_i L B_j)(D_{ji} - I_n)\mathbf{1} = (B_i L B_j)D_{ji}\mathbf{1} - (B_i L B_j)\mathbf{1}$ onde $(B_i L B_j)D_{ji}$ é uma matriz diagonal onde a i -ésima entrada da diagonal é o número L_{ij} e todas as demais entradas são nulas e portanto o vetor $(B_i L B_j)D_{ji}\mathbf{1}$ tem na sua i -ésima entrada o número L_{ij} e todas as demais entradas nulas. Por outro lado, o vetor $(B_i L B_j)\mathbf{1}$ é exatamente o vetor que tem o número L_{ij} na sua i -ésima entrada e todas as demais nulas. Portanto $(B_i L B_j)D_{ji}\mathbf{1} - (B_i L B_j)\mathbf{1} = \mathbf{0}$.

Novamente, fazemos as projeções de (8.14) nos modos normais e transversais aplicando os operadores π_N e π_T como descritos na Seção 8.2. Aplicando π_N ficamos com $\mathbf{1} \otimes \dot{s} = \mathbf{1} \otimes f(s) + \pi_N R(s, U)$. Aplicando π_T ficamos com

$$\dot{U} = [I_n \otimes Df(s) - \alpha(L \otimes H)]U + \left[\sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij} \right] U + \pi_N R(s, U). \quad (8.15)$$

Porém, perceba que se olharmos apenas para a equação não-perturbada

$$\dot{U} = [I_n \otimes Df(s) - \alpha(L \otimes H)]U \quad (8.16)$$

já sabemos, pelo Teorema 17, que $U(t)$ cumpre $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = \mathbf{0}$ quando $\alpha > \beta/(\lambda_2 \mu_1)$. Então, consideramos a equação (8.16) com a perturbação linear $\left[\sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij} \right] U$, utilizamos diretamente o Teorema 10 para determinar a magnitude que a referida perturbação pode ter. Assim $\sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij}$ deve cumprir,

$$\sup_t \left\| \sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij} \right\| < \frac{\eta}{\kappa}.$$

onde $\eta = \lambda_2 \mu_1 - \beta$ e $\kappa = \max_{2 \leq i \leq n} k_i$ (ver página 52 para mais detalhes). Mas

$$\begin{aligned} \sup_t \left\| \sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij} \right\| &\leq \sup_t \sum_{i,j=1}^n \|(B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij}\| \\ &= \sup_t \sum_{i,j=1}^n \|(B_i L B_j)(D_{ji} - I_n)\| \|V_{ij}\| \\ &\leq \sup_t \|L\| (\|D_{ji}\| + \|I_n\|) \sum_{i,j=1}^n \|V_{ij}\|, \end{aligned}$$

onde $\|B_i L B_j\| \leq \|B_i\| \|L\| \|B_j\|$, $\|B_i\| = 1$, $\|D_{ji}\| = 1$, e $\|I_n\| = 1$, isto é, podemos impor que

$$\sup_t \sum_{i,j=1}^n \|V_{ij}\| < \frac{\eta}{2\kappa\|L\|}, \quad \text{ou melhor,} \quad \sup_t \sum_{i,j=1:i \sim j}^n \|V_{ij}\| < \frac{\eta}{2\kappa\|L\|} \quad (8.17)$$

pois, olhando para o modelo de perturbação (8.13) verifica-se que quando i não é vizinho de j então $B_i L B_j = \mathbf{0} \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ de forma que a equação (8.13) pode ser melhor escrita como

$$\dot{X} = F(X) - \alpha(L \otimes H)X + \left[\sum_{i,j=1:i \sim j}^n (B_i L B_j)(D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij} \right] X$$

e ainda, as contas realizadas não sofrem alterações. Pelo Teorema 11, tem-se que $\kappa = 1$ se usarmos a norma $\|\cdot\|_\infty$. Considerando agora a influência do resto na equação (8.15), utilizamos novamente o Lema 5 e a Proposição 3, de forma que garantimos que a estabilidade da variedade de sincronização não é destruída. ■

Capítulo 9

Conclusões

9.1 Considerações Finais

Ao se abordar o problema da sincronização em redes complexas utilizamos a teoria de contrações uniformes em equações diferenciais lineares não-autônomas, caracterizando assim uma nova abordagem sobre um tema tão importante e que está enraizado nos principais ramos das ciências naturais, exatas, sociais, e enfim na vida humana.

Observa-se que o estado síncrono global dos osciladores difusivamente acoplados é uma variedade invariante pelas equações do movimento ao considerar o modelo utilizado (6.3). Tal estado é atingido e garantido ser uniformemente assintoticamente estável devido à força do parâmetro global de acoplamento α , de forma que o seu valor crítico é determinado unicamente pelas contribuições da dinâmica intrínseca dos elementos, de propriedades espectrais da matriz de acoplamento e do segundo autovalor do laplaciano da rede.

O parâmetro crítico de acoplamento, com relação à sincronização, é observacionalmente, e como já era de se esperar, devido as várias superestimações sobre o mesmo, muito maior do que o realmente necessário para que tal estado ocorra. Porém, não se garante que durante o intervalo entre o real α_c e $\beta/(\lambda_2\mu_1)$ o estado síncrono global seja uniformemente assintoticamente estável - a variedade invariante N (6.6) é localmente atratora se $\alpha > \beta/(\lambda_2\mu_1)$ (Teorema 17). É também possível verificar esse resultado através das simulações realizadas em dois osciladores acoplados.

Da mesma forma que verifica-se a superestimação de α_c , a vizinhança de atração de N pode ser bem maior do que aquela à qual podemos garantir. Além disso, a cota (6.14) para a magnitude da perturbação pode apresentar algumas falhas, uma delas está relacionada à utilização da desigualdade triangular para fazer superestimações. Além disso, a condição (6.14) é apenas uma condição necessária, isto é, a mesma não garante que a estabilidade da variedade de sincronização não seja resistente a perturbações com magnitudes fora da cota estabelecida.

9.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

A principal sugestão seria a abordagem da persistência da sincronização em redes de sistemas não-idênticos. Este caso já foi estudado por Pereira e colaboradores em [PEB⁺13]. A variedade invariante N não existe neste caso, mas pode-se utilizar resultados da teoria de equações diferenciais não-autônomas para estabelecer a persistência do comportamento coletivo sob perturbações intrínsecas na dinâmica individual dos elementos.

Esta situação é mais desafiadora por várias razões. Por exemplo, como mencionado, o estado completamente sincronizado não é um estado invariante do sistema, e portanto os elementos podem não sincronizar mesmo para acoplamentos fortes. Pode-se considerar que a não-identidade na dinâmica dos osciladores é na verdade uma quase identidade, ou seja, seria o mesmo que considerar que o campo do sistema isolado está sujeito a perturbações e então mapeamos

$$f(x_i) \mapsto f(x_i) + w_i(x_i),$$

onde $\max_i \|w_i(x_i)\| \leq \gamma$ seria a máxima magnitude das perturbações. Mesmo se todos osciladores tem um estado inicial igual a perturbação w_i , eles podem ser levados a estados completamente distintos. Uma questão em aberto na literatura é se as perturbações do campo de vetores implicam na não existência de soluções síncronas.

Apêndice A

Álgebra Linear

A.1 Menores Principais

Nós podemos aferir a definitude¹ de uma matriz simétrica calculando os autovalores da mesma. Porém, outra forma consiste em usar os menores principais.

Definição 31. *Seja $A = [A_{ij}] \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$. Para cada inteiro $1 \leq k \leq n$, o k -ésimo **menor principal** de A , denotado por D_k , é o determinante da matriz*

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

a qual se obtém deletando-se as linhas e colunas de ordem $k + 1$ até n .

Teorema 20. *Seja $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ uma matriz simétrica e $1 \leq k \leq n$. Então*

1. *A é positiva-definida se e somente se $D_k > 0$ para todo k .*
2. *A é positiva semi-definida se e somente se $D_k \geq 0$ para todo k .*
3. *A é negativa-definida se e somente se $(-1)^k D_k < 0$ para todo k .*
4. *A é negativa semi-definida se e somente se $(-1)^k D_k \leq 0$ para todo k .*

Prova: Ver [Zha99], p. 200.

Corolário 3. *Seja $A \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ uma matriz simétrica. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A é negativa-definida.*
2. *Todos os autovalores de A são negativos.*
3. *Os menores principais de A alternam o sinal começando com $D_1 = \det(A_1) < 0$.*

¹Consiste da classe dos conceitos das matrizes positiva-definida, positiva semi-definida, negativa-definida e negativa semi-definida.

A.2 Obtenção do Modelo de Perturbação em Blocos

Esta secção trata sobre a obtenção do modelo de perturbação na função de acoplamento o qual, quando escrito na forma de blocos é resumido na equação (6.13).

Considere a equação (6.12) que pode ser escrita como

$$\dot{x}_i = f(x_i) - \alpha \sum_j L_{ij} H(x_j) - \alpha \sum_j L_{ij} H(x_i) - \sum_j L_{ij} V_{ij} x_j + \sum_j L_{ij} V_{ij} x_i \quad (\text{A.1})$$

$$= f(x_i) - \alpha \sum_j L_{ij} H(x_j) - \sum_j L_{ij} V_{ij} x_j + \sum_j L_{ij} V_{ij} x_i. \quad (\text{A.2})$$

O objetivo então é empilhar os n vetores de \mathbb{R}^m de cada parcela de (A.2). Quando do empilhamento da parcela $\sum_j L_{ij} H(x_j)$, isto é, o vetor $\left(\sum_j L_{1j} H(x_j), \dots, \sum_j L_{nj} H(x_j)\right) \in \mathbb{R}^{nm}$, já sabemos que o mesmo pode ser escrito como $(L \otimes H)X$ onde L é o laplaciano da rede e $X = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$. Do empilhamento dos vetores $\sum_j L_{ij} V_{ij} x_j$, pode-se observar que o mesmo é obtido através da multiplicação

$$\begin{pmatrix} L_{11}V_{11} & L_{12}V_{12} & \cdots & L_{1n}V_{1n} \\ L_{21}V_{21} & L_{22}V_{22} & \cdots & L_{2n}V_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1}V_{n1} & L_{n2}V_{n2} & \cdots & L_{nn}V_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Mas a matriz acima descrita pode ser escrita como $\sum_{i,j=1}^n D_{ij} \otimes L_{ij} V_{ij}$ ou ainda como $\sum_{i,j=1}^n B_i L B_j \otimes V_{ij}$ onde $D_{ij} \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é a matriz cuja ij -ésima entrada é igual a 1 e todas as demais são nulas e $B_i \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n)$ é uma matriz diagonal tal que a i -ésima entrada da diagonal é igual a 1 e todas as demais são nulas. Note que o produto $B_i L B_j$ resulta numa matriz onde o ij -ésimo elemento é igual a L_{ij} e todos os demais elementos são nulos.

De forma semelhante, o empilhamento das parcelas $\sum_j L_{ij} V_{ij} x_i$ pode ser escrito pela multiplicação

$$\begin{pmatrix} \sum_j L_{1j} V_{1j} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_j L_{2j} V_{2j} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \sum_j L_{nj} V_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

onde $\mathbf{0} \in \text{Mat}(\mathbb{R}, m)$ é a matriz nula. Esta última matriz pode ser escrita como $\sum_{i=1}^n D_{ii} \otimes \sum_{j=1}^n L_{ij} V_{ij} = \sum_{i,j=1}^n D_{ii} L_{ij} \otimes V_{ij}$, ou ainda como $\sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j) D_{ji} \otimes V_{ij}$. Note que o papel de D_{ji} é de trazer o único elemento não nulo, provavelmente, de $B_i L B_j$ para a diagonal de sua respectiva linha. Assim, de posse das parcelas do bloco temos o modelo

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X) - \alpha(L \otimes H)X - \left[\sum_{i,j=1}^n B_i L B_j \otimes V_{ij} \right] X + \left[\sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j) D_{ji} \otimes V_{ij} \right] X \\ &= F(X) - \alpha(L \otimes H)X + \left[\sum_{i,j=1}^n (B_i L B_j) (D_{ji} - I_n) \otimes V_{ij} \right] X. \end{aligned}$$

Apêndice B

Equações Diferenciais Ordinárias

B.1 Existência, Unicidade e Extensão

Considere o sistema de equações diferenciais autônomas

$$\dot{x} = f(x) \tag{B.1}$$

onde $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 , ou seja, suas derivadas parciais primeiras existem e são contínuas. Abordamos apenas o caso autônomo, porém os resultados aqui apresentados são extensíveis ao caso não-autônomo, isto é $f = f(t, x)$.

Uma solução de (B.1) é o caminho $x : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ definido para algum intervalo $J \subset \mathbb{R}$ tal que $\dot{x}(t) = f(x(t)) \forall t \in J$. Um valor inicial para a solução $x : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma especificação da forma $x(t_0) = x_0$ onde $t_0 \in J$ e $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Podemos considerar $t_0 = 0$.

Uma equação diferencial não-linear pode ter várias soluções que satisfazem o mesmo valor inicial. Além da questão da unicidade, também temos a questão da existência. Então, afim de estabelecer condições para que o sistema (B.1), sob uma dada uma condição inicial, possua uma única solução, consideramos o

Teorema 21 (da Existência e Unicidade). *Considere o problema de valor inicial*

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Suponha que $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^1 . Então, existe uma única solução para o referido problema de valor inicial. De forma mais precisa, existe $c > 0$ e uma única solução

$$x : (-c, c) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

satisfazendo a condição $x(0) = x_0$.

Prova: Ver [HSD04], p. 385.

O resultado apresentado acima garante a existência e unicidade da solução, porém apenas localmente. O resultado a seguir dá as condições necessárias para que a solução possa ser estendida, ou seja, para que a solução esteja definida não apenas para uma vizinhança do tempo inicial, mas por todo o tempo futuro.

Teorema 22 (Extensão). *Seja \mathcal{C} um subconjunto compacto de $U \subset \mathbb{R}^m$ e seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^1$. Seja $x_0 \in \mathcal{C}$ e suponha que toda solução da forma $x : [0, b] \rightarrow U$ com $x(0) = x_0$ encontra-se inteiramente em \mathcal{C} . Então existe uma solução $x : [0, \infty) \rightarrow U$ satisfazendo $x(0) = x_0$ e $x(t) \in \mathcal{C}$ para todo $t \geq 0$, e portanto a solução está definida por todo o tempo futuro.*

Prova: Ver [HSD04], p. 397.

B.2 Desigualdade de Grönwall e Variação dos Parâmetros

O lema que segue é de fundamental importância para obter várias estimativas. A sua prova pode ser encontrada em [AM05], página 29.

Lema 6 (de Grönwall). *Sejam $\omega(t), k(t) : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ funções contínuas com $\omega(t), k(t) \geq 0$ para todo $t \in J$ e C uma constante não-negativa. Se*

$$\omega(t) \leq C + \int_s^t k(u)\omega(u)du \quad \forall s, t \in J,$$

então

$$\omega(t) \leq C \exp \left(\int_0^t k(u)du \right) \quad (\text{B.2})$$

para todo $t \in J$.

A seguinte proposição também é utilizada em algumas demonstrações, justificando portanto a sua abordagem.

Proposição 8 (Variação dos Parâmetros). *Sejam $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(\mathbb{R}, m)$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções contínuas. Considere a equação não-homogênea*

$$\dot{x} = A(t)x + g(t).$$

A solução de tal equação com a condição inicial $a(s) = x_0$ é dada por

$$x(t) = T(t, s)x(s) + \int_s^t T(t, u)g(u)du,$$

onde $T(t, s)$ é o operador de evolução da equação homogênea correspondente.

Prova: Ver [Tes12], p. 81.

B.3 Prova do Lema 5

Prova: Tomando $x = s + u$ suficientemente próximo de s , seguimos a expansão em série de Taylor de $f(s + u)$ até ordem 1. Vamos utilizar a representação $f = (f_1, \dots, f_m)$ onde $f_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, k = 1, \dots, m$. Assim, na expansão, cada componente de f é da forma $f_k(s + u) = f_k(s) + Df_k(s)u + r_k(s, u)$, isto é,

$$f(s + u) = (f_1(s), \dots, f_m(s)) + (Df_1(s)u, \dots, Df_m(s)u) + (r_1(s, u), \dots, r_m(s, u)).$$

Pelo Teorema de Taylor com resto de Lagrange [Apo62] tem-se que $r_k(s, u) = (1/2)u^\dagger D^2 f_k(s + \theta u)u$, para algum $0 < \theta < 1, \forall k$. Assim, $\|r_k(s, u)\| \leq (1/2)\|D^2 f_k(s + \theta u)\|\|u\|^2$. Como $f_k \in C^d, d \geq 2$, então $D^2 f_k(s + \theta u)$ é contínua e $s + \theta u \in \Omega$ (compacto). Então, pelo Teorema de Weierstrass existe M_s tal que $\|D^2 f_k(s + \theta u)\| \leq M_s$ para cada s fixado. Assim, $M_s : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua que toma valores num compacto, logo, existe M , uniforme em s , tal que $\|r_k(s, u)\| \leq M\|u\|^2, \forall k$. Podemos utilizar a norma $\|\cdot\|_\infty$, sem perder a generalidade, para estimar $R(s, u) = (r_1(s, u), \dots, r_m(s, u))$. Então

$$\|R(s, u)\|_\infty = \max_k \|r_k(s, u)\| \leq M\|u\|_\infty^2.$$

■

Referências Bibliográficas

- [ADGK⁺08] Alex Arenas, Albert Díaz-Guilera, Jürgen Kurths, Yamir Moreno e Changsong Zhou. Synchronization in complex networks. *Phys. Rep.*, 469:93–153, 2008. [1](#)
- [AM05] P.J. Antsaklis e A.N. Michel. *Linear Systems*. Birkhäuser Boston, 2005. [60](#)
- [APK01] Michael Rosenblum Arkady Pikovsky e Jürgen Kurths. *Sync: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, 2001. [1](#)
- [APN99] Torkel Glad Alexander Pogrosmy e Henk Nijmeijer. On diffusion driven oscillations in coupled dynamical systems. *Int. J. Bif. Chaos* *9*, 629, 1999. [31](#)
- [Apo62] T.M. Apostol. *Calculus*. Number v. 2 in Calculus. Blaisdell Pub. Co., 1962. [38](#), [60](#)
- [Arn92] V.I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer Textbook. New York, 1992. [9](#)
- [BA99] Albert-László Barabási e Réka Albert. Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 286(5439):509–512, Outubro 1999. [30](#)
- [BBH04] V. N. Belykh, I. V. Belykh e M. Hasler. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems. *Physica D*, 195:159–187, 2004. [2](#)
- [BN69] F.A. BRAUER e J.A. Nohel. *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: An Introduction*. Dover Books on Mathematics Series. Dover, 1969. [9](#), [10](#), [11](#)
- [BP02] L. Barreira e Y.B. Pesin. *Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory*. University Lecture Series. American Mathematical Society, 2002. [2](#)
- [BS09] Ed Bullmore e Olaf Sporns. Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems. *Nature Reviews Neuroscience*, 10(3):186–198, February 2009. [2](#)
- [BV07] Luiz Barreira e Claudia Valls. Stability in nonautonomous dynamics: A survey of recent results. *São Paulo J. Math. Sci.* *1* (133-174), 2007. [16](#), [19](#)
- [CLotMSU06] F.R.K. Chung, L. Lu, Conference Board of the Mathematical Sciences e National Science Foundation (U.S.). *Complex Graphs and Networks*. Number N° 107 in Regional Conference Series in Mathematics. American Mathematical Society, 2006. [1](#), [30](#)
- [Cop78] W.A. Coppel. *Dichotomies in stability theory*. Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1978. [3](#), [16](#), [22](#), [45](#)
- [Deh10] M. Dehmer. *Structural Analysis of Complex Networks*. Birkhäuser Boston, 2010. [30](#)
- [DL07] C.I. Doering e A.O. Lopes. *Equações diferenciais ordinárias*. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007. [6](#), [16](#)

- [Fie73] Miroslav Fiedler. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23:298–305, 1973. [29](#)
- [GH83] J. Guckenheimer e P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Number Bd. 42 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 1983. [19](#)
- [GMV12] J M V Grzybowski, E E N Macau e T Yoneyama. On the formulation and solution of the isochronal synchronization stability problem in delay-coupled complex networks. *Chaos*, v 22, 2012. [2](#)
- [HCLP09] Liang Huang, Qingfei Chen, Ying-Cheng Lai e Louis M Pecora. Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, v 80, 2009. [2](#)
- [HSD04] M.W. Hirsch, S. Smale e R.L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2004. [12](#), [59](#)
- [Jos00] Kresimir Josic. Synchronization of chaotic systems and invariant manifolds. *Nonlinearity*, 13(4):1321, 2000. [2](#), [3](#)
- [JR08] Krešimir Josić e Robert Rosenbaum. Unstable solutions of nonautonomous linear differential equations. *SIAM Rev.*, 50(3):570–584, 2008. [16](#)
- [Lim09] E.L. Lima. *Álgebra Linear*. Coleção matemática universitária. IMPA, 2009. [5](#)
- [Lim10] E.L. Lima. *Curso de Análise*. Number v. 2 in Projeto Euclides. Impa-Cnpq, 2010. [4](#), [5](#), [8](#), [21](#), [48](#)
- [LT85] P. Lancaster e M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices: With Applications*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, 1985. [6](#), [7](#)
- [MJ03] J. Milton e P. Jung. *Epilepsy as a Dynamic Disease*. Springer, 2003. [1](#)
- [Moh91] Bojan Mohar. Eigenvalues, diameter, and mean distance in graphs. *Graphs And Combinatorics*, 7:53–64, 1991. [29](#)
- [Mun00] J.R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Incorporated, 2000. [8](#)
- [MZK05] Adilson E. Motter, Changsong Zhou e Juergen Kurths. Network Synchronization, Diffusion, and the Paradox of Heterogeneity. Fevereiro 2005. [2](#)
- [Nij01] H. Nijmeijer. A dynamical control view on synchronization. *Phys. D*, 154(3-4):219–228, 2001. [2](#), [3](#)
- [O’S06] M. O’Searcoid. *Metric Spaces*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2006. [4](#), [5](#)
- [PBK07] Tiago Pereira, M. S. Baptista e J. Kurths. Detecting phase synchronization by localized maps: Application to neural networks. *arXiv:0706.3317*, 2007. [1](#)
- [PC98] Louis M. Pecora e Thomas L. Carroll. Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems. *Physical Review Letters*, 80(10):2109–2112, Março 1998. [1](#), [2](#)
- [PEB⁺13] Tiago Pereira, Deniz Eroglu, G. B. Bagci, U. Tirnakli e Henrik J. Jensen. Connectivity driven coherence in complex networks. *arXiv:1302.3137*, 2013. [3](#), [55](#)
- [Per10] Tiago Pereira. Hub synchronization in scale-free networks. *Physical Review E*, 82(3):036201+, Setembro 2010. [2](#), [30](#)

- [Per12] Tiago Pereira. *Stability of Synchronized Motion in Complex Networks*. arXiv:1112.2297v2, 2012. [2](#), [3](#)
- [RP03] Michael Rosenblum e Arkady Pikovsky. Synchronization: from pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators. *Contemporary Physics*, 44(5):401–416, 2003. [1](#), [33](#)
- [Sal62] B. Saltzman. Finite amplitude free convection as an initial value problem. *J. Atmos Sci*, 19:329–341, 1962. [12](#)
- [Spa82] C. Sparrow. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, 1982. [15](#)
- [Str03] Steven H. Strogatz. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hyperion, 1st edição, Março 2003. [1](#)
- [Ter09] W.J. Terrell. *Stability and Stabilization: An Introduction*. Princeton University Press, 2009. [11](#)
- [Tes12] G. Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Graduate Studies in Mathematics Series. Amer Mathematical Society, 2012. [16](#), [17](#), [60](#)
- [TRW⁺98] P. Tass, M. G. Rosenblum, J. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler e H. J. Freund. Detection of n:m Phase Locking from Noisy Data: Application to Magnetoencephalography. *Physical Review Letters*, 81:3291–3294, Outubro 1998. [1](#)
- [Via00] Marcelo Viana. What’s new on Lorenz strange attractors? *The Mathematical Intelligencer*, 22(3):6–19, 2000. [12](#), [13](#)
- [WS98] D. J. Watts e S. H. Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684):409–10, 1998. [2](#), [30](#)
- [Wu07] C.W. Wu. *Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems*. World Scientific Publishing Company, Incorporated, 2007. [2](#)
- [Zha99] F. Zhang. *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*. Universitext (1979). Springer, 1999. [57](#)